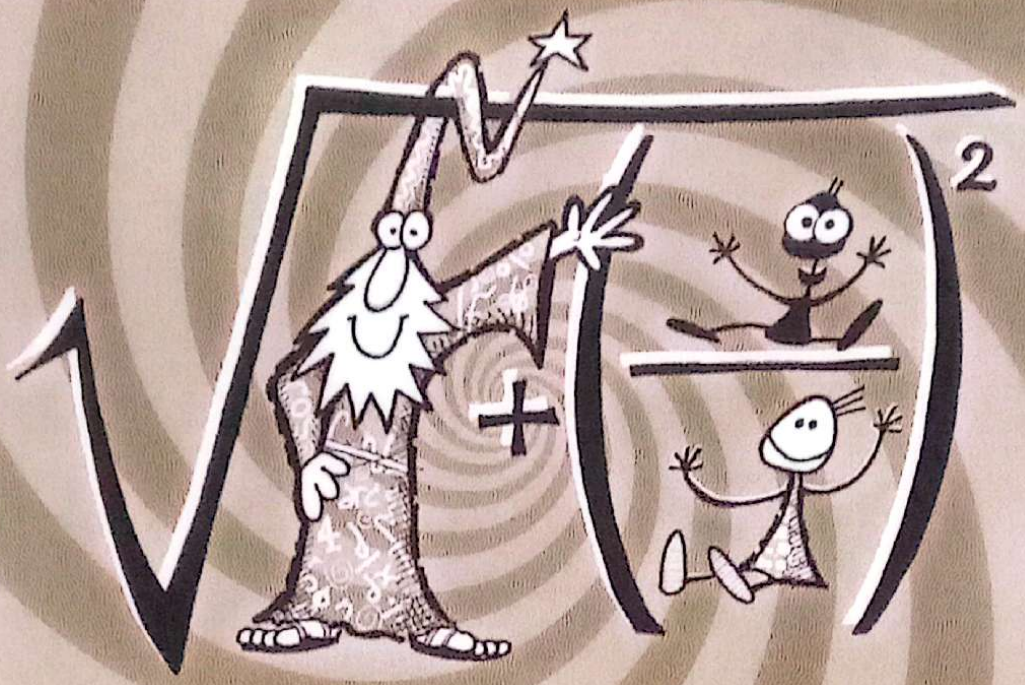
FÓRMULAS ÚTILES DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA



Matthew Watkins

Librero

Título original: *Useful Mathematical and Physical Formulae*

© 2023 Librero b.v. (edición española)
www.librero.nl

Idea y diseño: © 2022 Wooden Books Limited
Texto: © 2022 Matthew Watkins

Publicado en colaboración con Alexian Limited

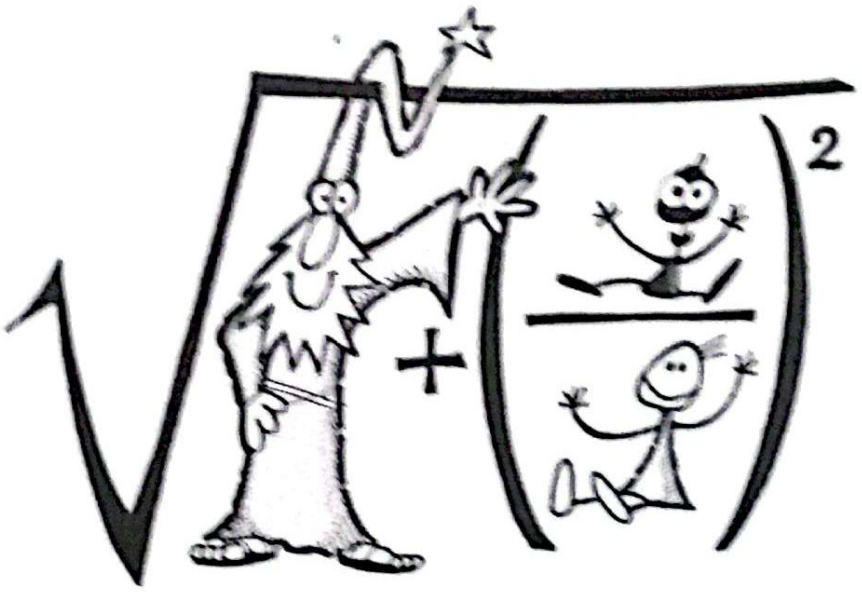
Producción de la edición española:
Traducción: Carme Franch Ribes para Delivering iBooks & Design
Redacción y maquetación: Delivering iBooks & Design, Barcelona
Distribución exclusiva de la edición española:
Librero IBP S. L.
C/ Paseo de los Olmos, n.º 20
Planta 1.ª, oficina 7
28005 Madrid, España
www.librero-ibp.es

Impreso en India
ISBN: 978-84-1154-023-0

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta obra se puede reproducir, almacenar o transmitir de forma o por medio alguno, sea este electrónico, mecánico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares de los derechos.

Se han realizado todos los esfuerzos posibles para garantizar que la información recogida en este libro sea correcta. En caso de error u omisión al consignar los derechos de autor de las imágenes incluidas en la obra, Librero b.v. pide disculpas y se compromete a enmendar la información en futuras ediciones del libro.

FÓRMULAS ÚTILES DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA



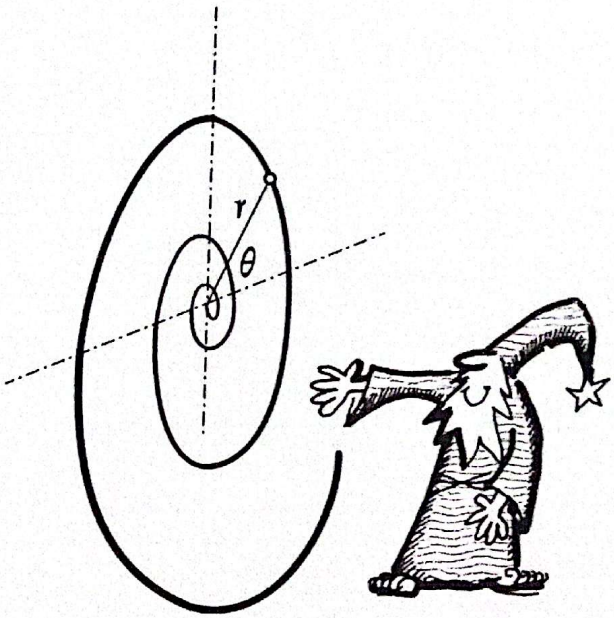
Compilado por
Matthew Watkins

Ilustrado por
Matt Tweed

Librero

Este libro está dedicado a mamá y a papá, y a Inge,
que me demostró que las cosas que de verdad importan
no se pueden describir con fórmulas.

Para ampliar conocimientos, recomiendo:
Time and Number *de Marie-Louise von Franz y* A Beginner's Guide to Constructing the Universe: The Mathematical Archetypes of Nature, Art, and Science *de Michael S. Schneider.*



ÍNDICE

Introducción	1
Triángulos	2
Figuras bidimensionales	4
Figuras tridimensionales	6
Geometría coordinada	8
Trigonometría	10
Identidades trigonométricas	12
Trigonometría esférica	14
La fórmula cuadrática	16
Matrices y vectores	18
Exponenciales y logaritmos	20
Medias y probabilidades	22
Combinaciones y permutaciones	24
Estadística	26
Leyes de Kepler y Newton	28
Gravedad y proyectiles	30
Energía, trabajo y cantidad de movimiento	32
Rotación y equilibrio	34
Movimiento armónico simple	36
Tensión, deformación y calor	38
Líquidos y gases	40
Sonido	42
Luz	44
Electricidad y carga	46
Campos electromagnéticos	48
Cálculo	50
Números complejos	52
Teoría de la relatividad	54
Apéndices	56

Ecuaciones de mecánica cuántica

Relación de Planck
energía de una partícula

$$E = hf$$

h = constante de Planck

Frecuencia y longitud de onda

$$c = f\lambda$$

f = frecuencia

Longitud de onda de Broglie

$$\lambda_D = \frac{h}{p}$$

p = momento de una partícula

Energía de un fotón

$$E = pc$$

c = velocidad de la luz

Número de onda

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$$

λ = longitud de onda

Constante de Planck reducida

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Equivalencia energía-momento de la luz

$$E = mc^2$$

m = masa

$$i = \sqrt{-1}$$

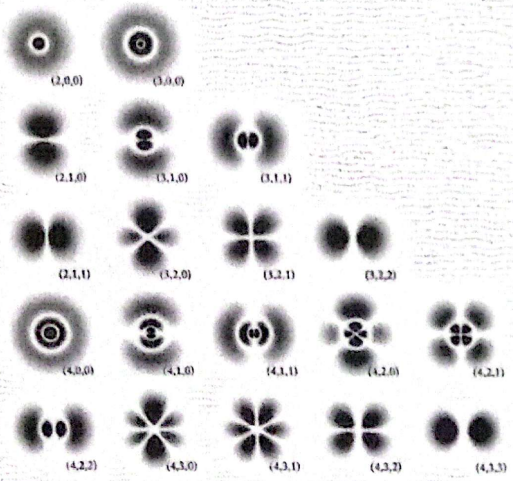
Ecuación de Euler[1]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Relación de Planck-Einstein

$$E = \hbar\omega$$

ω = frecuencia angular



Ecuación de onda de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z,t)\right]\Psi(x,y,z,t)$$

Operador de energía — Vector de estado del sistema cuántico — Energía cinética + Energía potencial = Operador hamiltoniano

Forma simplificada

$$\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$ es el operador laplaciano

INTRODUCCIÓN

En este librito pretendemos presentar las fórmulas básicas de matemáticas y física de una manera práctica y amena. Los términos y símbolos menos habituales se definen en el índice.

La utilización de números y símbolos para modelar, predecir y manipular la realidad es una forma muy poderosa de brujería. Lamentablemente, el dominio de estas habilidades no implica necesariamente sabiduría o artes adivinatorias. En consecuencia, proliferan las tecnologías perniciosas y una obsesión creciente por la *cantidad*, simbolizada por la sumisión de casi todo a la economía global. Se recomienda al lector que utilice el contenido de este libro con la debida precaución.

Por otro lado, las herramientas matemáticas han posibilitado la percepción de unidad en áreas aparentemente independientes. Así, por ejemplo, antiguamente *luz* y *electricidad* eran conceptos que no tenían nada que ver, pero hoy ambos se entienden en términos de la teoría de *campos electromagnéticos*.

Ilustrando brillantemente este «arma de doble filo», la célebre fórmula de Einstein $E = mc^2$, quizá la más célebre de todas, quedará unida para siempre a la creación de armas atómicas y el (re)descubrimiento científico de la unidad de materia y energía.

¡Larga vida a su capacidad de asombro y disfrute!

ÍNDICE

Introducción	1
Triángulos	2
Figuras bidimensionales	4
Figuras tridimensionales	6
Geometría coordinada	8
Trigonometría	10
Identidades trigonométricas	12
Trigonometría esférica	14
La fórmula cuadrática	16
Matrices y vectores	18
Exponenciales y logaritmos	20
Medias y probabilidades	22
Combinaciones y permutaciones	24
Estadística	26
Leyes de Kepler y Newton	28
Gravedad y proyectiles	30
Energía, trabajo y cantidad de movimiento	32
Rotación y equilibrio	34
Movimiento armónico simple	36
Tensión, deformación y calor	38
Líquidos y gases	40
Sonido	42
Luz	44
Electricidad y carga	46
Campos electromagnéticos	48
Cálculo	50
Números complejos	52
Teoría de la relatividad	54
Apéndices	56

TRIÁNGULOS

Sus distintos centros

Un triángulo rectángulo cumple el *teorema de Pitágoras*: el cuadrado de la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (*pág. sig., ar. izqda.*).

$a^2 + b^2 = c^2$ o, lo que es lo mismo, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

La suma de los ángulos internos de un triángulo = 180°, o π *radianes.*

El *perímetro:* $P = a + b + c$

El área: $S = \frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2}\ ab \operatorname{sen} C$ (*pág. sig., ar. dcha.*).

Teorema del seno: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

(donde r es el radio de la *circunferencia circunscrita*).

Las *medianas* unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos. Las tres medianas se cortan en un punto denominado *baricentro*:

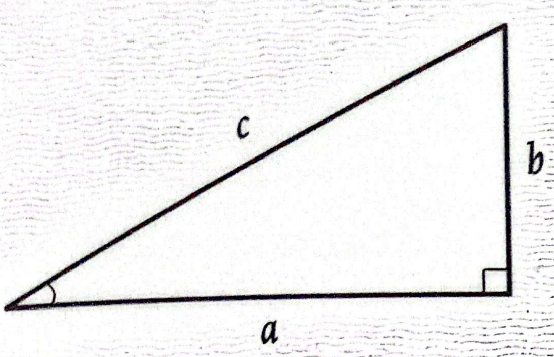
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \qquad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

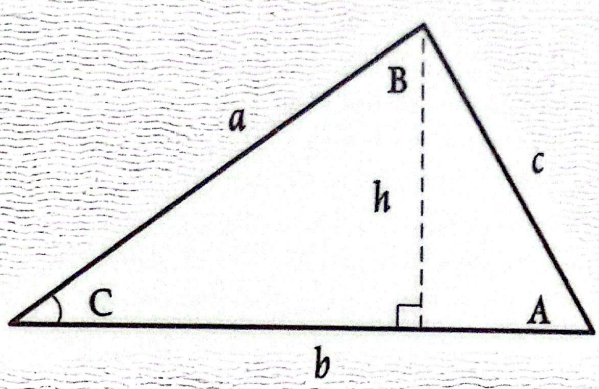
Las *alturas* son segmentos trazados entre cada vértice y el lado opuesto (o su prolongación), formando un ángulo recto:

$$h_a = \frac{2S}{a} \qquad h_b = \frac{2S}{b} \qquad h_c = \frac{2S}{c}$$

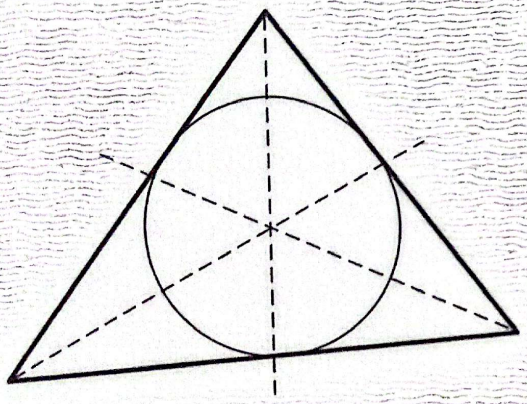
Las tres alturas se cortan en el *ortocentro.*



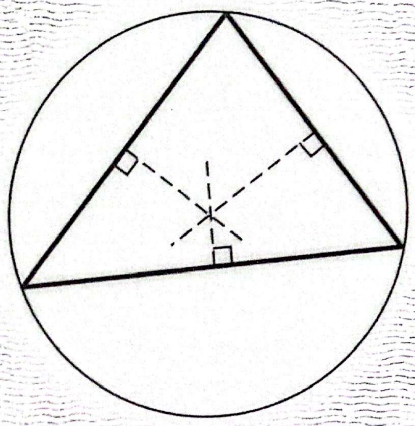
Triángulo rectángulo



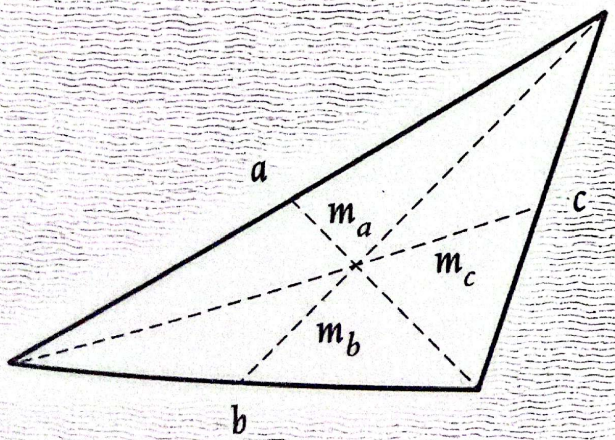
Ángulos internos de un triángulo



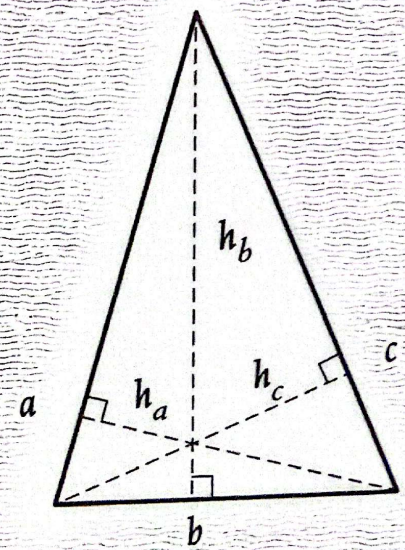
Las bisectrices de un triángulo se cortan en el centro de su circunferencia inscrita



Las mediatrices de un triángulo se cortan en el centro de su circunferencia circunscrita



Las medianas se trazan hasta el punto medio de cada lado y determinan el centro de gravedad del triángulo



Las alturas se cortan en el ortocentro (no necesariamente dentro del triángulo)

FIGURAS BIDIMENSIONALES

Áreas y perímetros

A continuación, se enumeran las fórmulas para calcular el perímetro y el área de varias figuras bidimensionales.

Círculo:
Radio = r, diámetro $d = 2r$
Perímetro, o *circunferencia* = $2\pi r = \pi d$
Área = πr^2 donde $\pi = 3{,}1415926\ldots$

Elipse:
Área = πab
a y b son los *semiejes menor* y *mayor* respectivamente. Los dos puntos ilustrados son sus *focos*, de modo que $l + m$ es constante.

Rectángulo:
Área = ab
Perímetro = $2a + 2b$

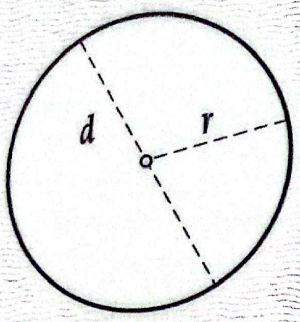
Paralelogramo:
Área = $bh = ab \operatorname{sen}\alpha$
Perímetro = $2a + 2b$

Trapecio:
Área = $\frac{1}{2}h(a + b)$
Perímetro = $a + b + h(\csc\alpha + \csc\beta)$

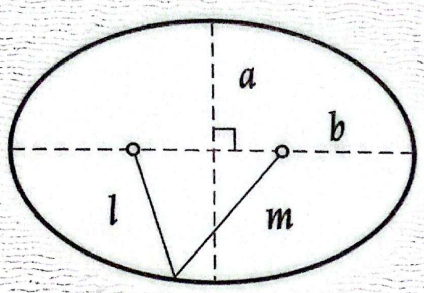
N-gono regular:
Área = $\frac{1}{4}nb^2 \cot(180°/n)$
Perímetro = nb
Los lados y los ángulos internos son todos iguales.

Cuadrilátero (i):
Área = $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\alpha$

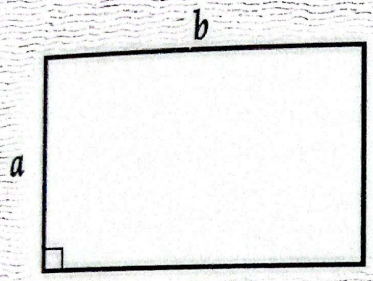
Cuadrilátero (ii):
Área = $\frac{1}{2}(h_1 + h_2)b + \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ch_2$



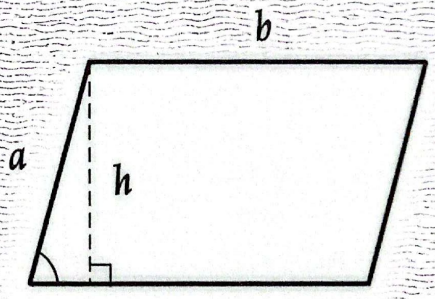
Círculo



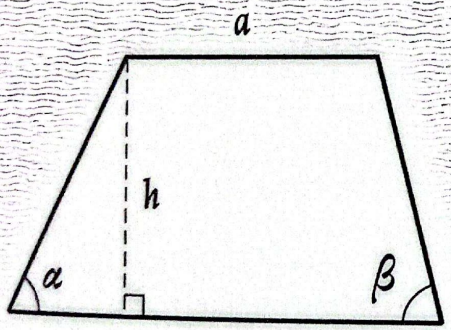
Elipse



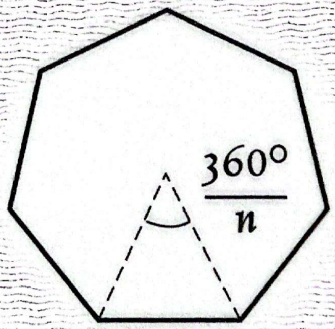
Rectángulo



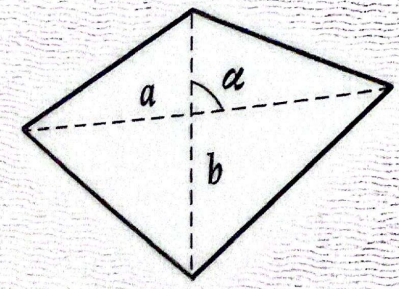
Paralelogramo



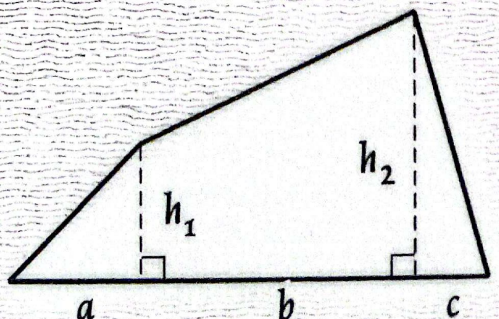
Trapecio



Polígono regular de n lados



Cuadrilátero (i)



Cuadrilátero (ii)

FIGURAS TRIDIMENSIONALES

Volúmenes y áreas de superficie

A continuación se enumeran las fórmulas para calcular el volumen y el área de superficie (bases incluidas) de ocho sólidos tridimensionales.

Esfera:

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Área de superficie = $4\pi r^2$

Caja:

Volumen = abc

Área de superficie = $2(ab + ac + bc)$

Cilindro:

Volumen = $\pi r^2 h$

Área de superficie = $2\pi rh + 2\pi r^2$

Cono:

Volumen = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Área de superficie = $\pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$

Pirámide:

Área de la base A

Volumen = $\frac{1}{3}Ah$

Tronco:

Volumen = $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

Área de superficie = $\pi(a + b)c + \pi a^2 + \pi b^2$

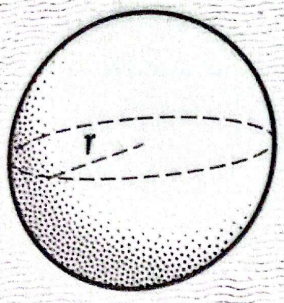
Elipsoide:

Volumen = $\frac{4}{3}\pi abc$

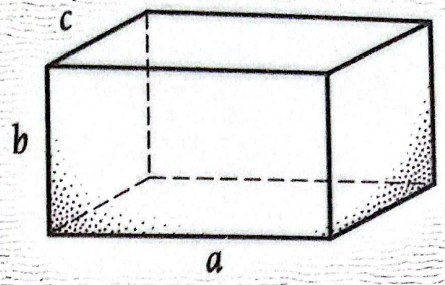
Toro:

Volumen = $\frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

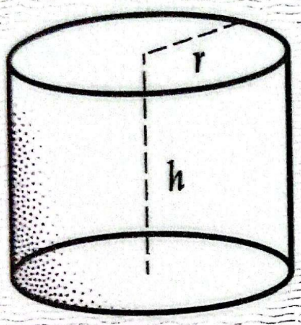
Área de superficie = $\pi^2(b^2 - a^2)$



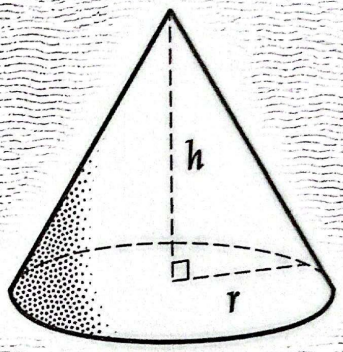
Esfera



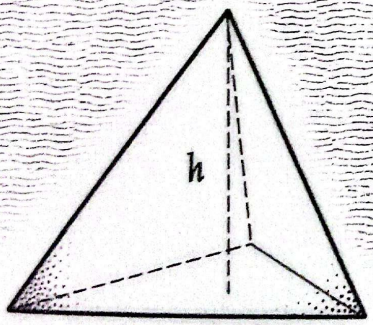
Caja (paralelepípedo rectangular))



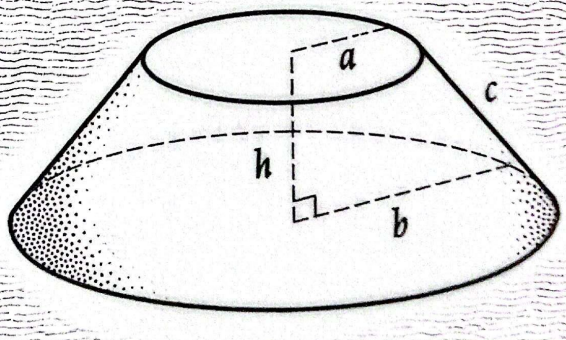
Cilindro



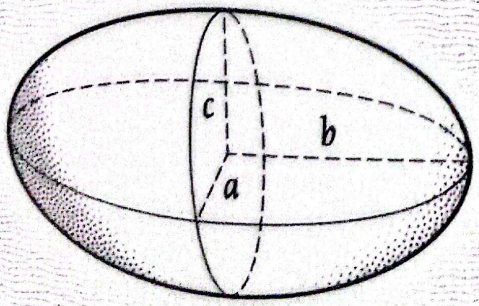
Cono



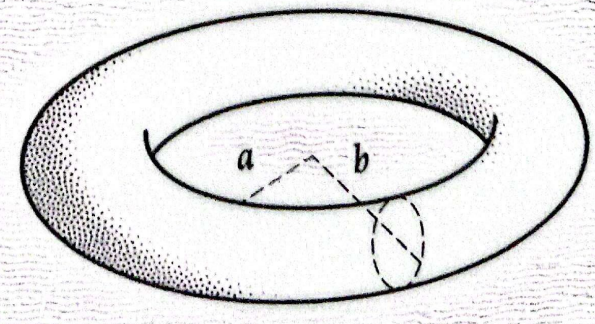
Pirámide con área de la base A



Tronco (cono truncado)



Elipsoide



Toro

GEOMETRÍA COORDINADA

Ejes, rectas, pendientes e intersecciones

La colocación de un par de ejes en ángulo recto en el plano permite definir un punto mediante un par de números reales (*pág. sig.*). Los ejes se cortan en (0, 0), el *origen*. Las posiciones horizontal y vertical suelen denominarse x e y, respectivamente.

La ecuación de una recta se expresa $y = m\,x + c$ donde m es su pendiente. Esta recta corta el eje y en $(0, c)$ y el eje x en $(-\frac{c}{m}, 0)$.

Una recta vertical tiene un valor x constante, que se expresa $x = k$.

La recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente n se expresa con la ecuación $y = nx + (y_0 - nx_0)$. Una recta perpendicular a otra de pendiente n tendrá una pendiente $-\frac{1}{n}$.

La ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

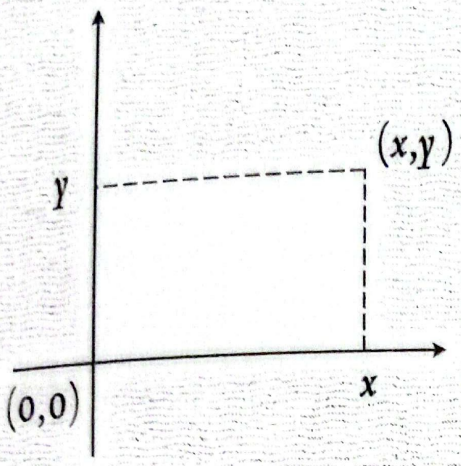
$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_2) + y_2 \qquad \text{cuando } x_1 \neq x_2.$$

El ángulo θ entre dos rectas de pendientes m y n verifica que:

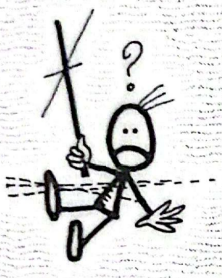
$$\tan\theta = \frac{m - n}{1 + mn}$$

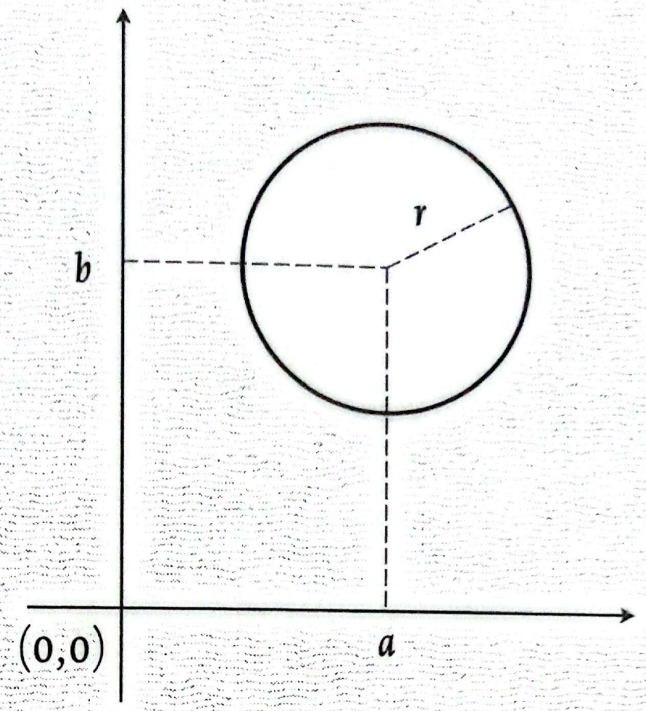
Un círculo, radio r, centro (a, b) se expresa $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

En tres dimensiones, se añade un eje z y muchas ecuaciones adoptan formas análogas. Por ejemplo, una esfera de radio r y centrada en (a, b, c) se expresa $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. La ecuación general para un plano tridimensional es $a\,x + b\,y + c\,z = d$.



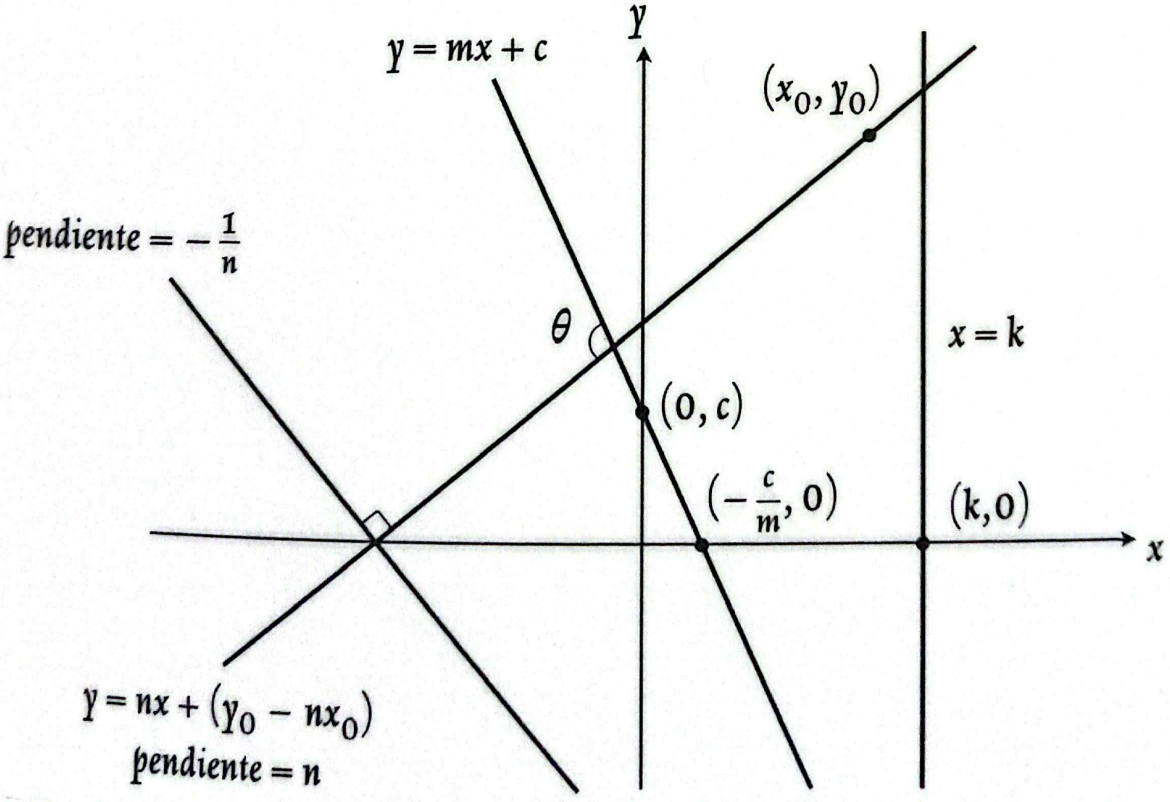
EL PLANO DE COORDENADAS





ECUACIÓN DEL CÍRCULO

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$



ECUACIONES DE LÍNEAS

TRIGONOMETRÍA

Aplicada a triángulos rectángulos

En la página siguiente, a la izquierda, se muestra un triángulo rectángulo con lados de longitudes a, b, c y un ángulo θ. A continuación, se definen las *seis funciones trigonométricas*: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

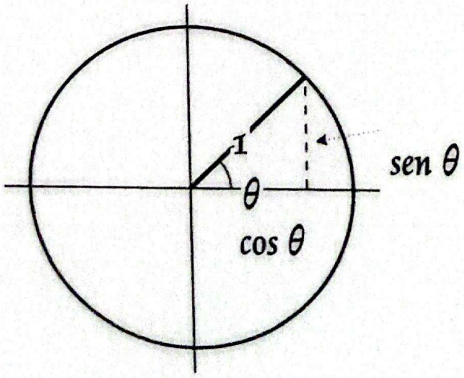
El seno y el coseno son la altura y la base de un triángulo rectángulo en un círculo de radio 1 como se muestra abajo y en la página siguiente, arriba a la derecha:

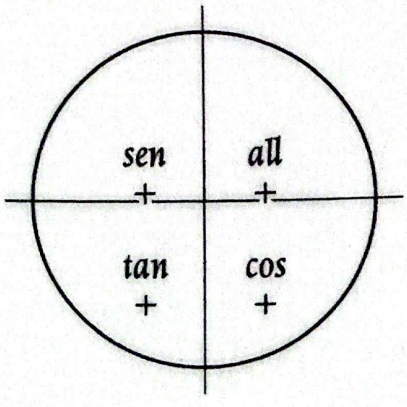
$$a = \cos\theta \quad \text{y} \quad b = \operatorname{sen}\theta$$

Por el Teorema de Pitágoras (*pág. 2*) sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que para cada ángulo θ del círculo tenemos la identidad fundamental:

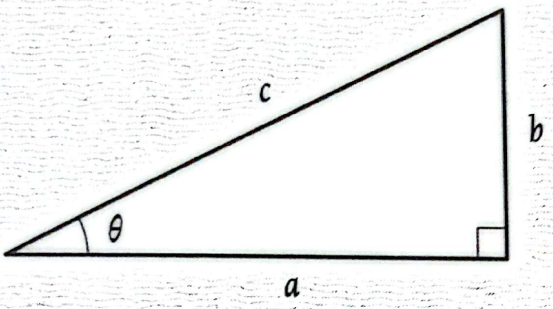
$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Senos, cosenos y tangentes tienen valores positivos o negativos en distintos cuadrantes del círculo como se muestra abajo a la derecha.





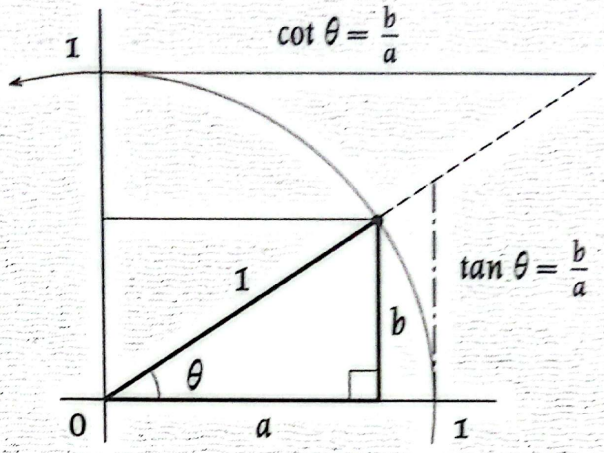
Un triángulo rectángulo



$a = c \cos \theta$
$= b \cot \theta$

$b = c \operatorname{sen} \theta$
$= a \tan \theta$

$c = a \sec \theta$
$= b \csc \theta$

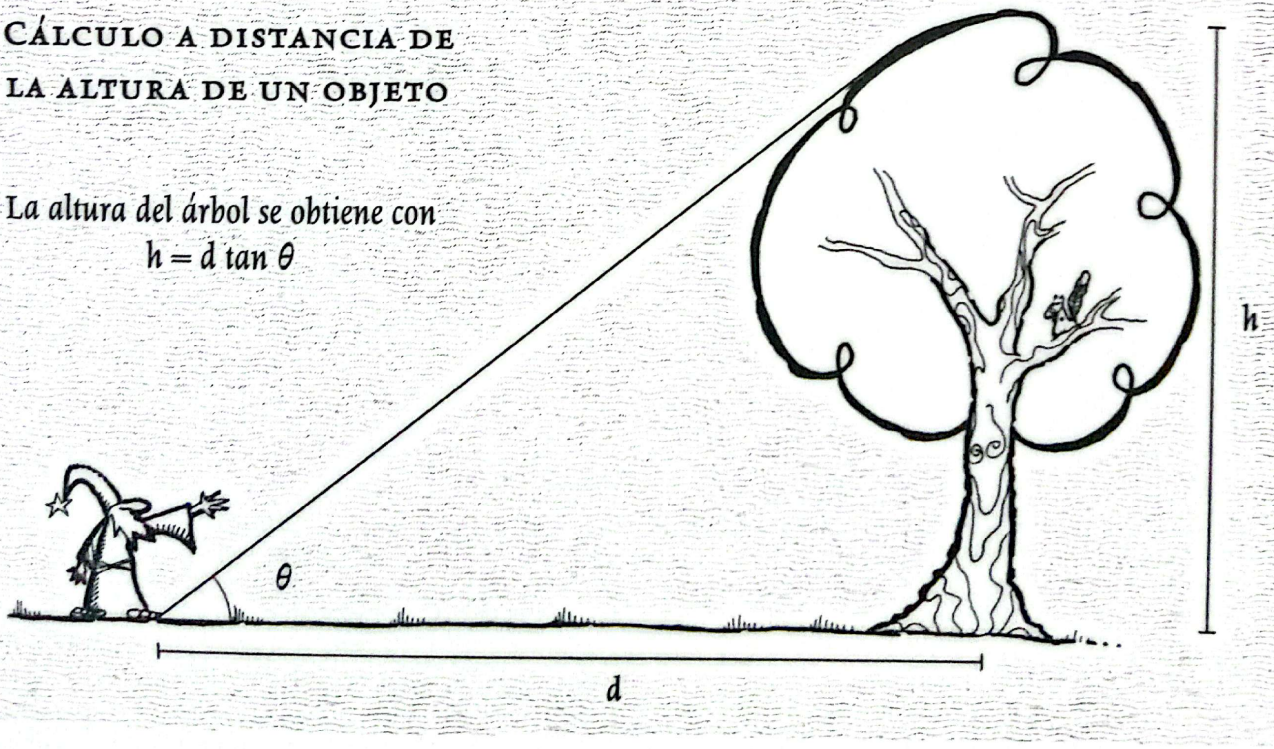


$a = \cos \theta \qquad b = \operatorname{sen} \theta$

Aquí se muestran cuatro de las seis funciones trigonométricas, generadas por un punto que se mueve en un círculo de radio 1.

Cálculo a distancia de la altura de un objeto

La altura del árbol se obtiene con
$h = d \tan \theta$



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Relación de las seis funciones

Las definiciones de la página anterior concluyen de este modo:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Si dividimos $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ por $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$ se obtiene:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{y} \qquad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

Las seis funciones aplicadas a ángulos negativos dan como resultado:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

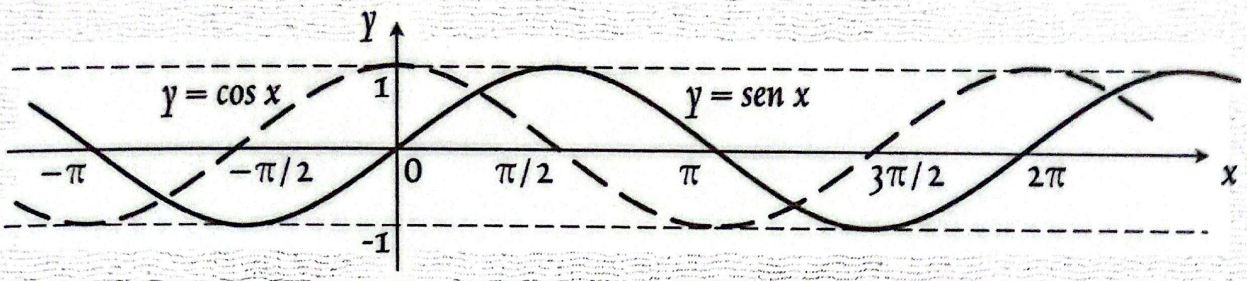
Las *fórmulas de suma de ángulos* se aplican al combinar dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sin}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

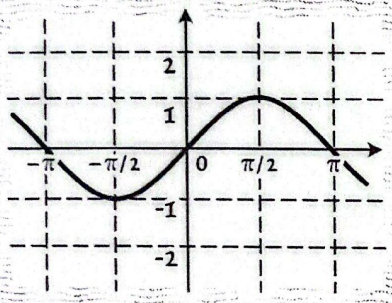
Para ángulos dobles o triples se utilizan las *fórmulas del ángulo múltiple:*

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \qquad \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

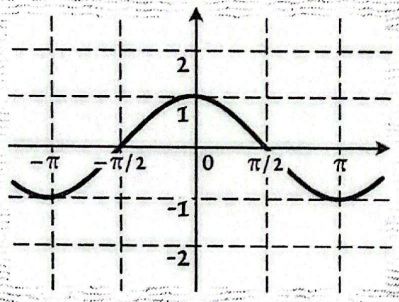
El gráfico de la pág. sig. está trazado en radianes (π radianes = 180°). Se acompaña de una tabla de consulta rápida para casos de emergencia.



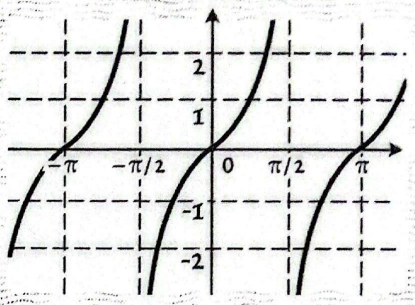
Seno x



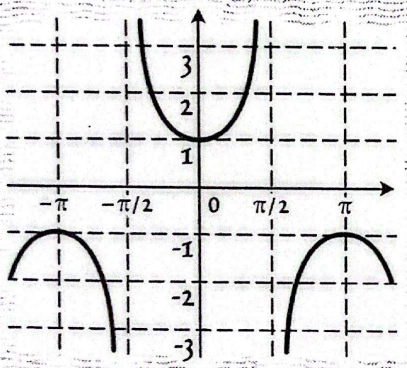
Coseno x



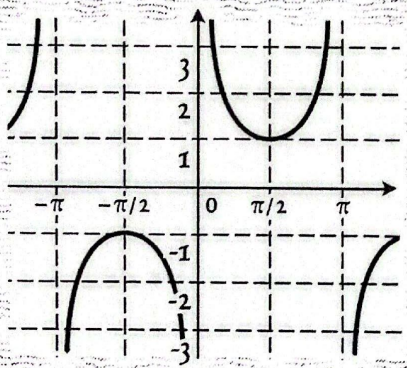
Tangente x



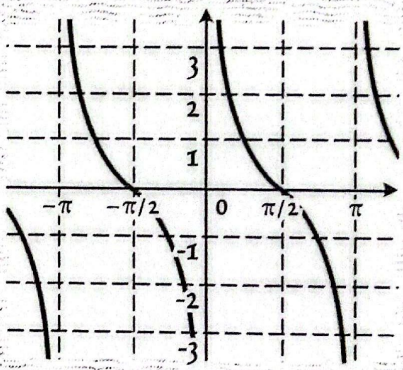
Secante x



Cosecante x



Cotangente x



Ángulo (grados)	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Ángulo (radianes)	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sen	0	1/2	1/√2	√3/2	1	0	−1	0
cos	1	√3/2	1/√2	1/2	0	−1	0	1
tan	0	1/√3	1	√3	∞	0	∞	0
sec	1	2/√3	√2	2	∞	−1	∞	1
csc	∞	2	√2	2/√3	1	∞	−1	∞
cot	∞	√3	1	1/√3	0	∞	0	∞

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Fórmulas para el cielo y la tierra

Un *triángulo esférico* tiene ángulos internos cuya suma oscila entre los 180 y los 540°. Sus lados son arcos de círculos máximos (cuyos centros coinciden todos en el centro de la esfera). Dos puntos de una esfera pueden definir un círculo máximo, y tres, un círculo menor. Un círculo en una esfera, ya sea máximo o menor, define dos polos. Los lados de un triángulo esférico pueden considerarse ángulos. Las seis cantidades principales se muestran en la página siguiente y cumplen:

Teorema del seno: $$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno: $$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

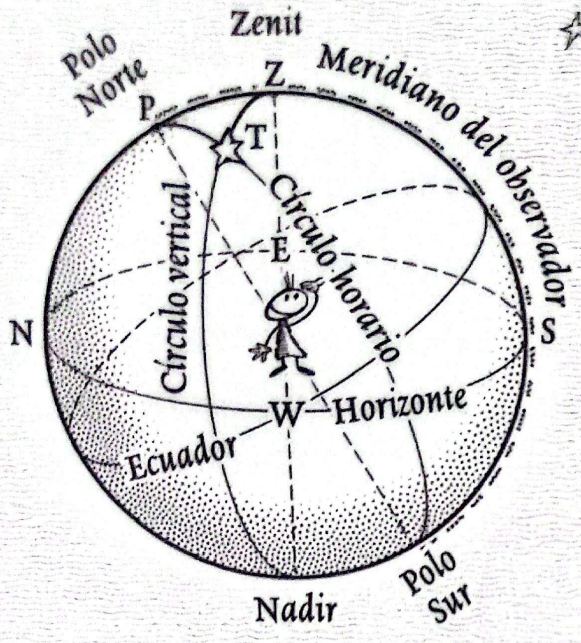
Teorema de la tangente: $$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}(a-b)}$$

La trigonometría esférica se utiliza en navegación. Por ejemplo, con los grados de *longitud* y *latitud*, un barco navega de Q a R:

$a = 90° - \text{lat. } R$ $\qquad$ $b = 90° - \text{lat. } Q$ $\qquad$ $C = \text{long. } Q - \text{long. } R$

C se conoce como el ángulo polar. El rumbo inicial y el rumbo final los proporcionan A y B y la longitud del trayecto, c. Utilice las siguientes ecuaciones para determinar B, A y c:

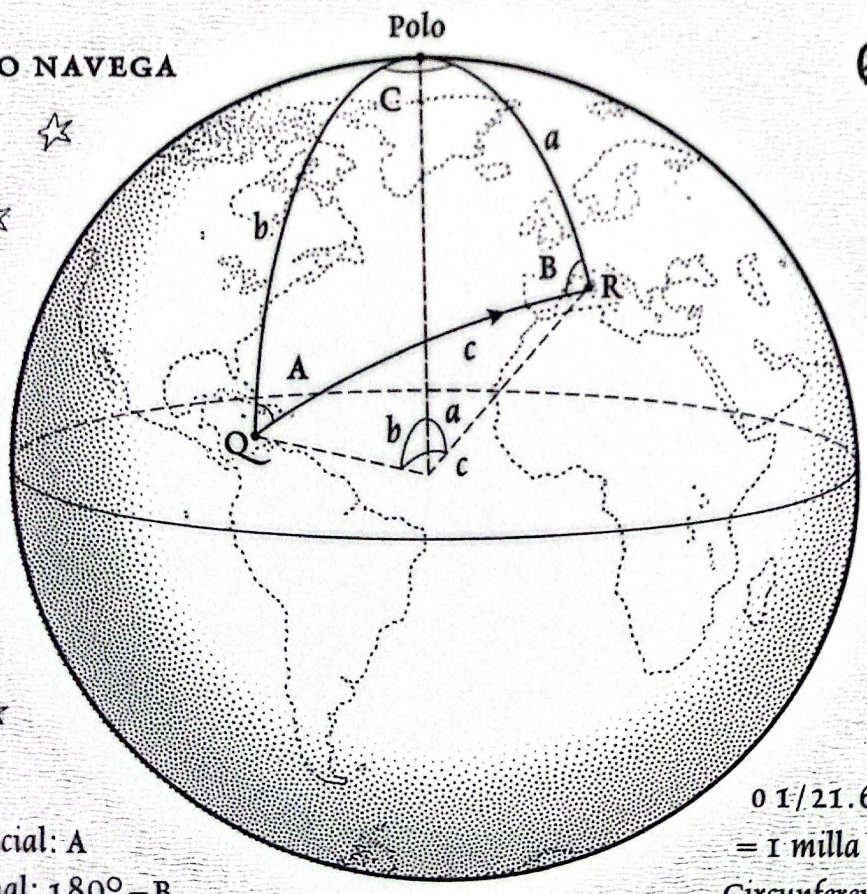
$$\tan \tfrac{1}{2}(B+A) = \cos \tfrac{1}{2}(b-a) \sec \tfrac{1}{2}(b+a) \cot \tfrac{1}{2}C$$
$$\tan \tfrac{1}{2}(B-A) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(b-a) \csc \tfrac{1}{2}(b+a) \cot \tfrac{1}{2}C$$
$$\tan \tfrac{1}{2}c = \tan \tfrac{1}{2}(b-a) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(B+A) \csc \tfrac{1}{2}(B-A)$$



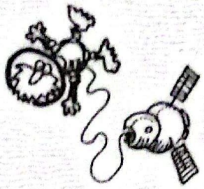
El triángulo astronómico PZT, para un objeto celeste

lado TZ = distancia zenit de T = 90° − altitud de T
lado TP = distancia polar de T = 90° − declinación de T
lado ZP = 90° ± latitud del observador (hemisferio N o S)
ángulo PZT = acimut de T (si T está al este del meridiano del observador) o 360° − acimut de T (si T está al oeste de OM)
ángulo ZPT = ángulo horario de T (si T está al oeste de OM) en horas 360° − ángulo horario (si T está al este de OM)

Un barco navega de Q a R



Rumbo inicial: A
Rumbo final: 180° − B
Ángulo polar: C



Geodética

1 minuto es $\frac{1}{60}$° o 1/21.600 de un gran círculo = 1 milla náutica = 1852 metros
Circunferencia media de la Tierra = 40.000 kilómetros

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Discriminantes y parábolas

Una *ecuación de segundo grado* se expresa $ax^2 + bx + c = 0$ (donde a no es cero). Las soluciones, o *raíces*, de este tipo de ecuaciones son dadas por la fórmula cuadrática:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad $b^2 - 4ac$ se denomina el *discriminante*, que dicta la naturaleza y el número de las soluciones. Existen tres casos:

$b^2 - 4ac > 0$ dos soluciones (reales) distintas

$b^2 - 4ac = 0$ solo una solución (real)

$b^2 - 4ac < 0$ dos soluciones *complejas* o *imaginarias* distintas (en lugar de *reales*; *pág. 52*).

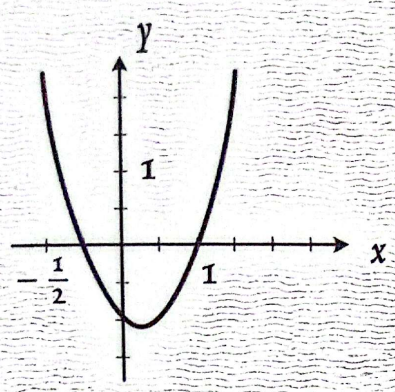
Ejemplos (*ilustrados en la página siguiente*):

i) $2x^2 - x - 1 = 0$ da un discriminante 9 y produce dos soluciones reales, 1 y $-\frac{1}{2}$;

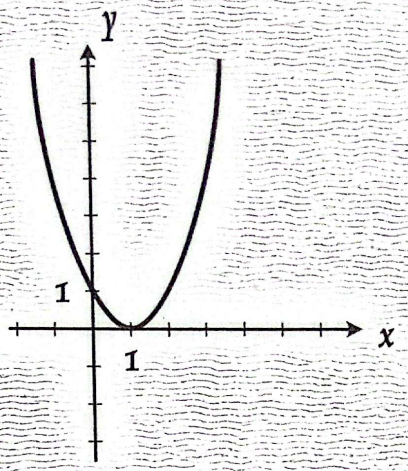
ii) $x^2 - 2x + 1 = 0$ da un discriminante cero, por tanto tiene una raíz real, a saber $x = 1$;

iii) $4x^2 + 8x + 5 = 0$ es un ejemplo de ecuación de segundo grado sin raíces reales, con las soluciones $x = -1 + \frac{i}{2}$ y $x = -1 - \frac{i}{2}$ (*pág. 52*).

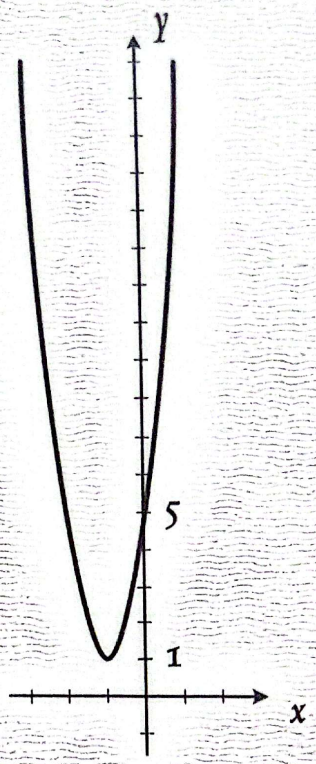
La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones reales en los valores de x donde la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ corta el eje x (*esto es*, donde $y = 0$).



$y = 2x^2 - x - 1$



$y = x^2 - 2x + 1$



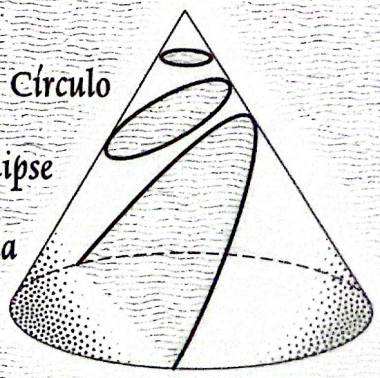
$y = 4x^2 + 8x + 5$

Curvas cuadráticas

la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ *es una curva llamada* PARÁBOLA

PARÁBOLAS
se encuentran en la trayectoria de los proyectiles y en las secciones cónicas.

Secciones cónicas



MATRICES Y VECTORES

Operaciones básicas y determinantes

Una matriz $m \times n$ es un conjunto rectangular de números con m filas y n columnas. Dos matrices $m \times n$ pueden sumarse o restarse de la manera lógica, y cualquier matriz puede multiplicarse de manera similar por un único número.

Solo se puede multiplicar una matriz $m \times n$ por una matriz $p \times q$ si $n = p$ (esto es, el número de columnas de la primera equivale al número de filas de la segunda). El procedimiento de la multiplicación de matrices se ilustra abajo. Nótese que la multiplicación de matrices no es conmutativa: **AB** no es necesariamente igual a **BA**. De hecho, **BA** no se define aquí a no ser que $m = q$. Una matriz *cuadrada* tiene el mismo número de filas que de columnas. El *determinante* $|\mathbf{A}|$ de una matriz cuadrada **A** es una importante cantidad escalar asociada a **A** (*pág. sig., ejemplos*). Los determinantes de matrices cuadradas más grandes se definen iterativamente.

La matriz *inversa* de una matriz $n \times n$ **A** con $|\mathbf{A}| \neq 0$ es una matrix, $\mathbf{A}^{-1}$, tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (la matriz identidad $n \times n$ definida en la *pág. sig.*).

Los *vectores* describen *desplazamientos* en el espacio, p. ej. $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$. Se suman de la forma lógica, y si forman un circuito cerrado, el vector suma es cero. El *producto escalar* de dos vectores $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ is $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta$, donde $\|\mathbf{a}\|$ es la longitud del vector $\mathbf{a} = (x, y, z)$, p. ej. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, y θ es el ángulo entre los vectores. El *producto vectorial* de dos vectores tridimensionales $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular a ambos, $\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta \, \mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario perpendicular a ambos con sentido dado por la regla de mano derecha.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br + ct & aq + bs + cu \\ dp + er + ft & dq + es + fu \end{bmatrix}$$

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

Crecimiento y disminución

Dado un valor a, podemos definir a al *cuadrado* y *a al cubo* de este modo: $a^2 = a \times a$, $a^3 = a \times a \times a$. En la expresión a^n, n es el *exponente*. Estas son las fórmulas exponenciales básicas:

$$a^0 = 1 \qquad a^n a^m = a^{n+m} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

El *logaritmo de base a* de x, $\log_a x = y$ es la cantidad que cumple $a^y = x$. Como $a^0 = 1$ y $a^1 = a$, siempre tenemos $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$. Estas son las fórmulas logarítmicas básicas:

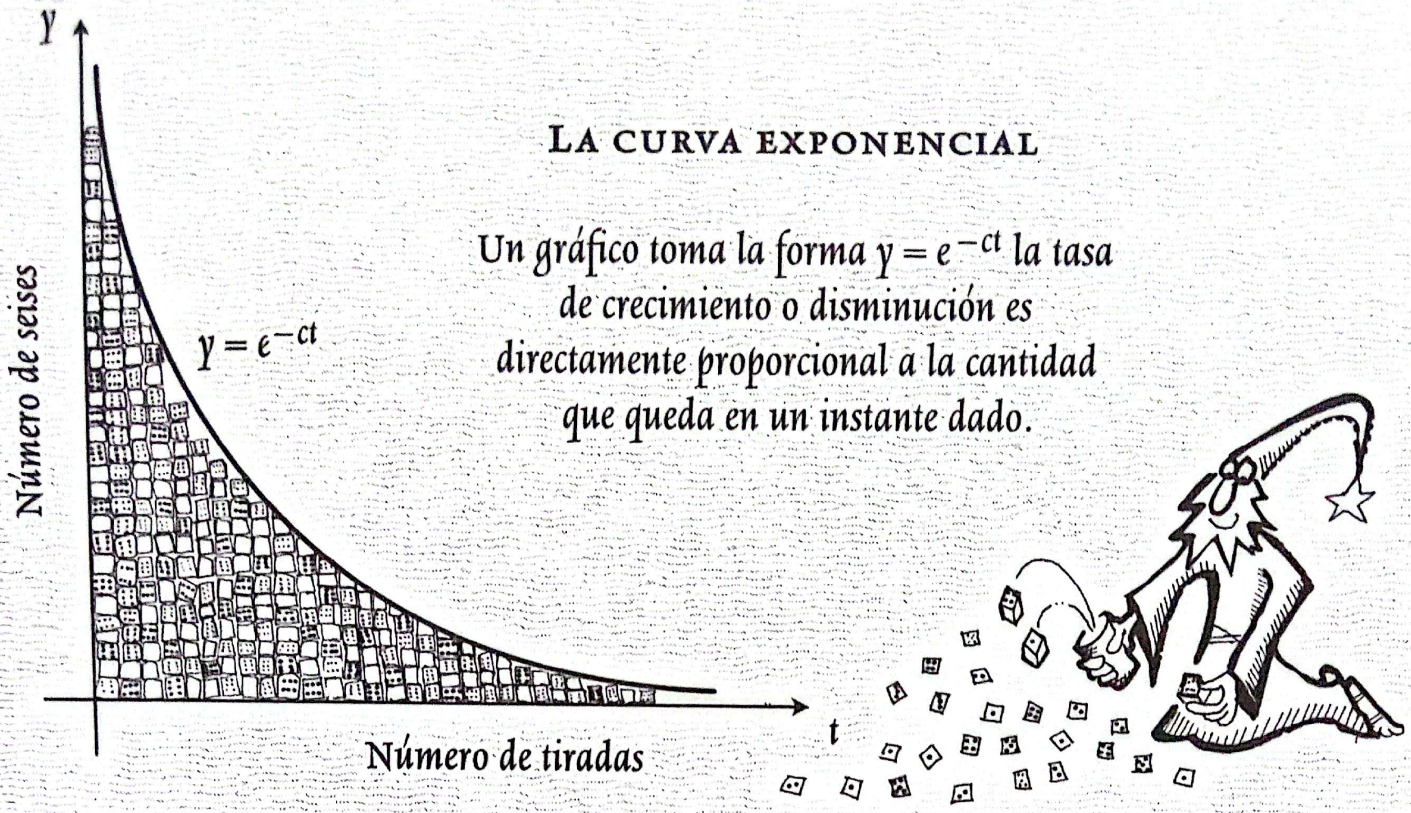
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^k = k \log_a x \qquad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x \qquad \log_k a = \log_m a \log_k m$$

Puede utilizarse cualquier base positiva (excepto 1), pero las más habituales son 10 y la constante e (= 2,718...), que se encuentra ampliamente en el mundo natural, a menudo en procesos de crecimiento y declive. En general $\log_e$ se escribe solo como *log* o *ln*. Los logaritmos permiten multiplicar y dividir números sumando o restando exponentes.

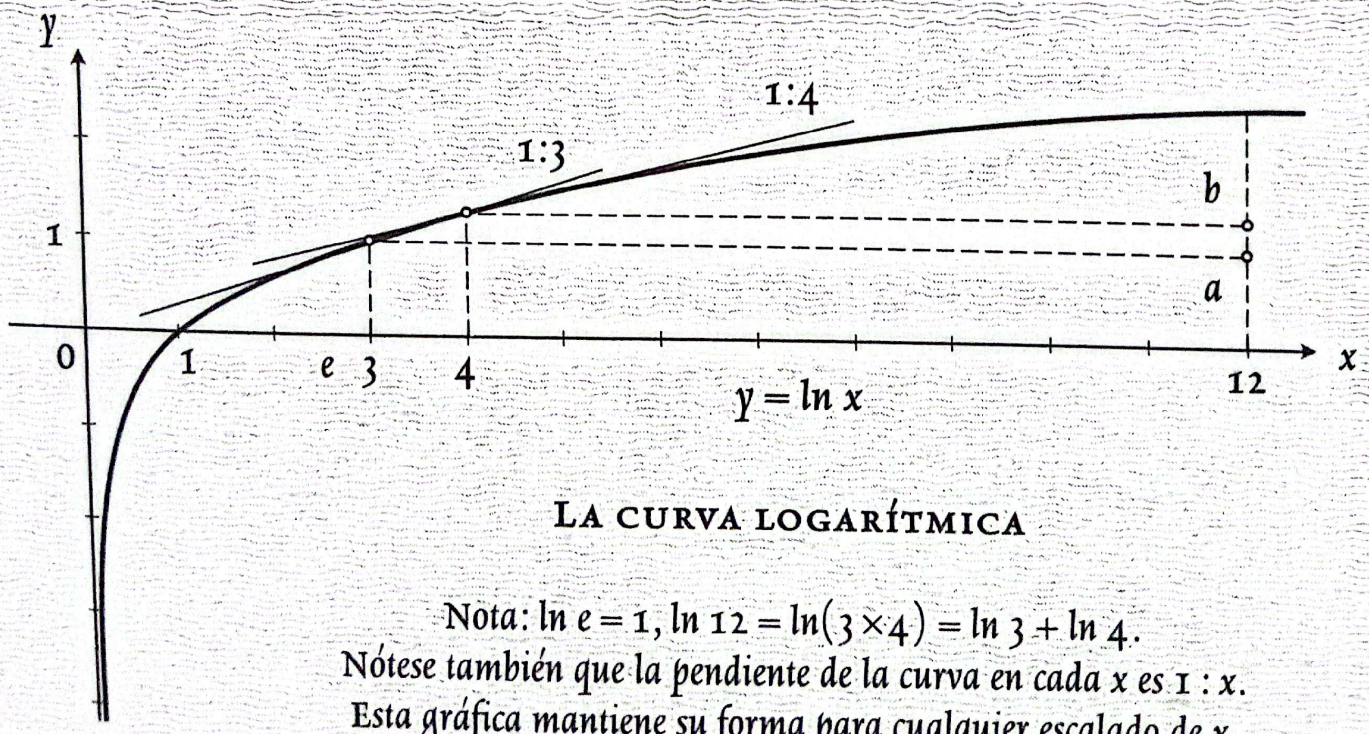
Las exponenciales son también útiles para calcular el *crecimiento compuesto*. Una cantidad x que aumenta o disminuye un p por ciento en una unidad de tiempo, tomará después de un tiempo t los valores $x\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ y $x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$ respectivamente.



La curva exponencial

Un gráfico toma la forma $y = e^{-ct}$ la tasa de crecimiento o disminución es directamente proporcional a la cantidad que queda en un instante dado.

Lance un buen número de dados y agrupe los seises.
Lance el resto, agrupe los seises y repita la operación. De esta forma creará una aproximación de un gráfico de disminución exponencial (que mejora cuando aumenta el número inicial de dados).



La curva logarítmica

Nota: $\ln e = 1$, $\ln 12 = \ln(3 \times 4) = \ln 3 + \ln 4$.
Nótese también que la pendiente de la curva en cada x es $1 : x$.
Esta gráfica mantiene su forma para cualquier escalado de x.

MEDIAS Y PROBABILIDADES

Proporciones seguras y resultados arriesgados

Dados dos números a y b, los tres tipos de *medias* importantes utilizados tradicionalmente en geometría, música y arquitectura son:

la *media aritmética*, $\frac{1}{2}(a+b)$, la *media geométrica*, $\sqrt{ab}$

y la *media armónica*, $\frac{2ab}{a+b}$

La media de una serie de datos es la suma de los mismos dividida por el número de elementos. La mediana es el valor intermedio de una serie ordenada de menor a mayor. La moda es el número que aparece con mayor frecuencia.

Supongamos que tenemos una situación con n resultados posibles igualmente probables, k de los cuales son deseados. La probabilidad p de que ocurra un resultado deseado en cualquier ocasión es:

$$p = \frac{\textit{número de resultados deseados}}{\textit{número total de resultados posibles}} = \frac{k}{n}$$

Nótese que p siempre está comprendida entre 0 y 1. Imagine que E y F son dos sucesos posibles independientes, con probabilidades $P(E)$ y $P(F)$, respectivamente. La probabilidad de que ocurran E y F es $P(EF) = P(E)\times P(F)$. Con esto, expresamos la probabilidad de que ocurran E o F como $P(E+F) = P(E)+P(F)-P(E\,F)$.

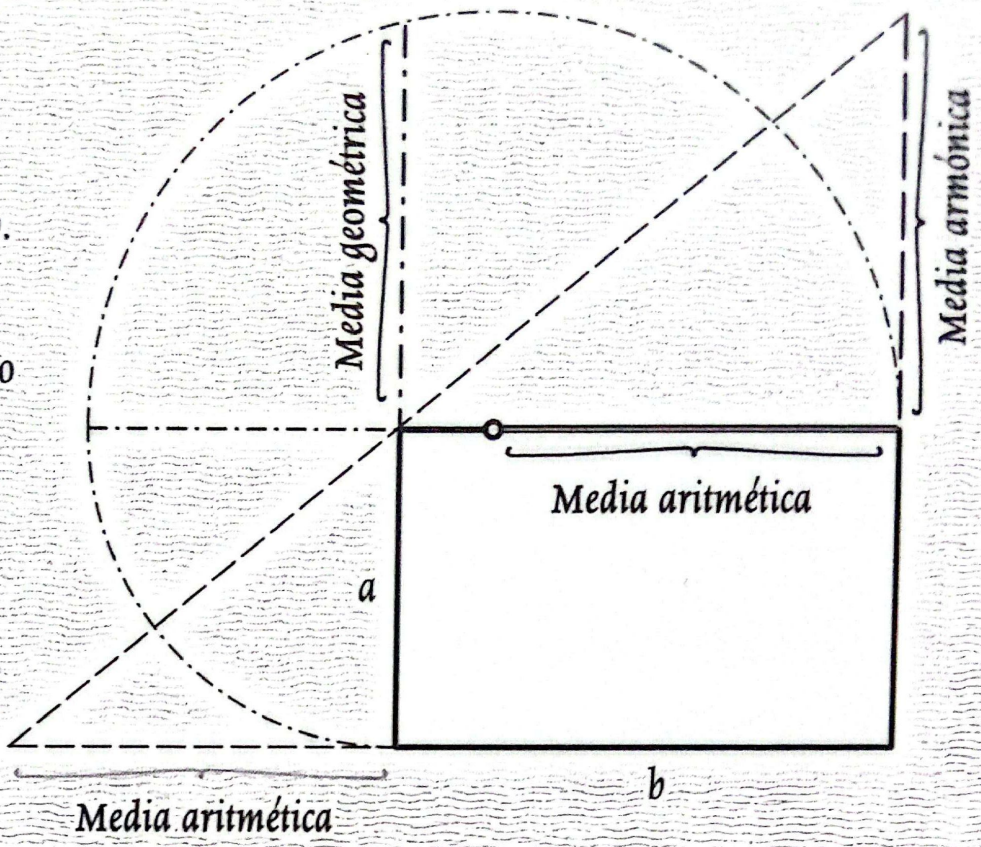
F no es independiente de E cuando la probabilidad de que ocurra F queda alterada por la ocurrencia de E. En este caso definimos la *probabilidad condicional* $P(FE)$ como la probabilidad de que ocurra F una vez se haya producido E, y tenemos $P(EF) = P(E) \times P(F|E)$. P. ej., si G y H representan la elección de una bola negra de la bolsa de la pág. sig., entonces $P(GH) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Las tres medias de *a* y *b*

La **media aritmética** es la mitad de la suma de *a* y *b*.

La **media geométrica** es la raíz cuadrada del producto de *a* y *b*.

La **media armónica** es el inverso de la media aritmética de 1 / *a* y 1 / *b*.



Cálculo de probabilidades

Tenemos que elegir una bola de cada bolsa:

P(E) = probabilidad de elegir una bola negra de la bolsa de la izquierda = $\frac{2}{5}$

P(F) = probabilidad de elegir una bola negra de la bolsa de la derecha = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

P(EF) = probabilidad de elegir bolas negras de ambas bolsas = $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

P(E+F) = probabilidad de elegir al menos una bola negra = $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$

COMBINACIONES Y PERMUTACIONES

Formas de distribuir las cosas

Supongamos que tenemos n elementos y queremos agrupar una cantidad k de los mismos. Existen dos tipos de agrupaciones: *combinaciones*, donde el orden no importa, y *permutaciones*, donde sí importa. Aquí se requiere la utilización de *factoriales*. El factorial de m, escrito $m!$ (donde $m \geq 1$) se define como:

$$m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\times 1 \quad (p.\ ej.\ 6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720)$$

0 es un caso especial: $0! = 1$ por convenio.

La cantidad de combinaciones de n elementos tomados de k en k es:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\text{, o también } \binom{n}{k}$$

La cantidad (lógicamente mayor) de permutaciones es:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$$

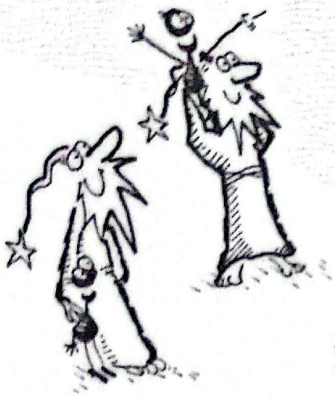
En una situación con dos posibles resultados, P y Q, con probabilidades p y q, sabemos que $p+q=1$, entonces $(p+q)^n = 1$. El término $\binom{n}{k}p^{n-k}q^k$ de la *expansión binomial* de $(p+q)^n$ es, por tanto, la probabilidad de que ocurran n-k casos de P y k de Q de un total de n. La fórmula binomial general es:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Aquí se aplican las filas del *triángulo de Pascal*. Por ejemplo:

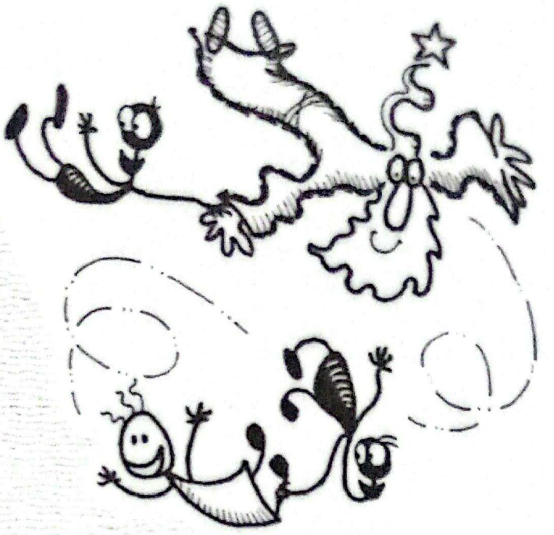
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

¿Cuántas maneras distintas existen de, entre tres objetos, elegir dos?



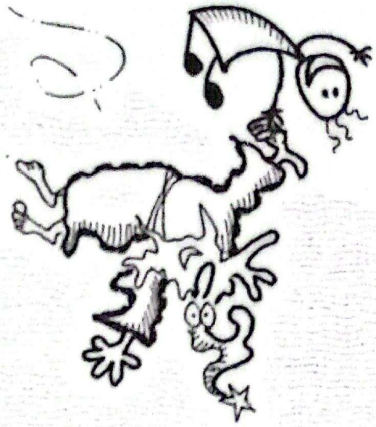
COMBINACIÓN
sin ningún orden en especial

$$C_2^3 = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{2} = 3$$



PERMUTACIÓN
donde el orden importa

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$



```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
```

TRIÁNGULO DE PASCAL

Cada número es la suma de los dos números que tiene por encima. La fila $n+1$ se corresponde con los términos de la expansión de $(x+y)^n$.

Así, por ejemplo, la sexta fila nos indica que:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ESTADÍSTICA

Distribución y desviación

El análisis estadístico permite procesar datos observados para revelar tendencias y hacer predicciones. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de valores de algún fenómeno mensurable, la media se expresa de este modo: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

La *desviación estándar* σ de la muestra calibra hasta qué punto estos datos se desvían de su media:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

La forma más habitual de *distribución estadística* es la *normal* o *gaussiana*. Su forma general crea una curva acampanada centrada en x cuya «anchura» depende de σ:

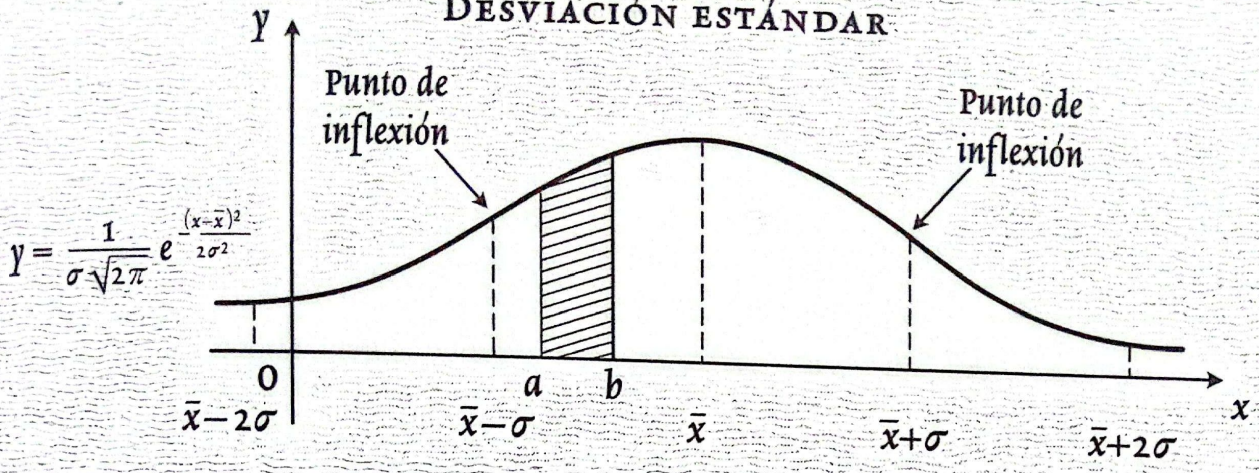
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

En datos con una *distribución normal*, la probabilidad de obtener un valor entre a y b es igual al área bajo la curva entre estos valores, como se ilustra en la página siguiente. El área total bajo la curva (todas las posibilidades) es igual a uno.

La *distribución de Poisson* nos indica que si el número medio de eventos de un determinado tipo en un intervalo de tiempo determinado es μ, entonces la probabilidad de que ocurran n eventos en un intervalo se expresa así:

$$p(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!} \text{ donde } e = 2{,}718\ldots \text{ } \textit{(ver pág. 52)}.$$

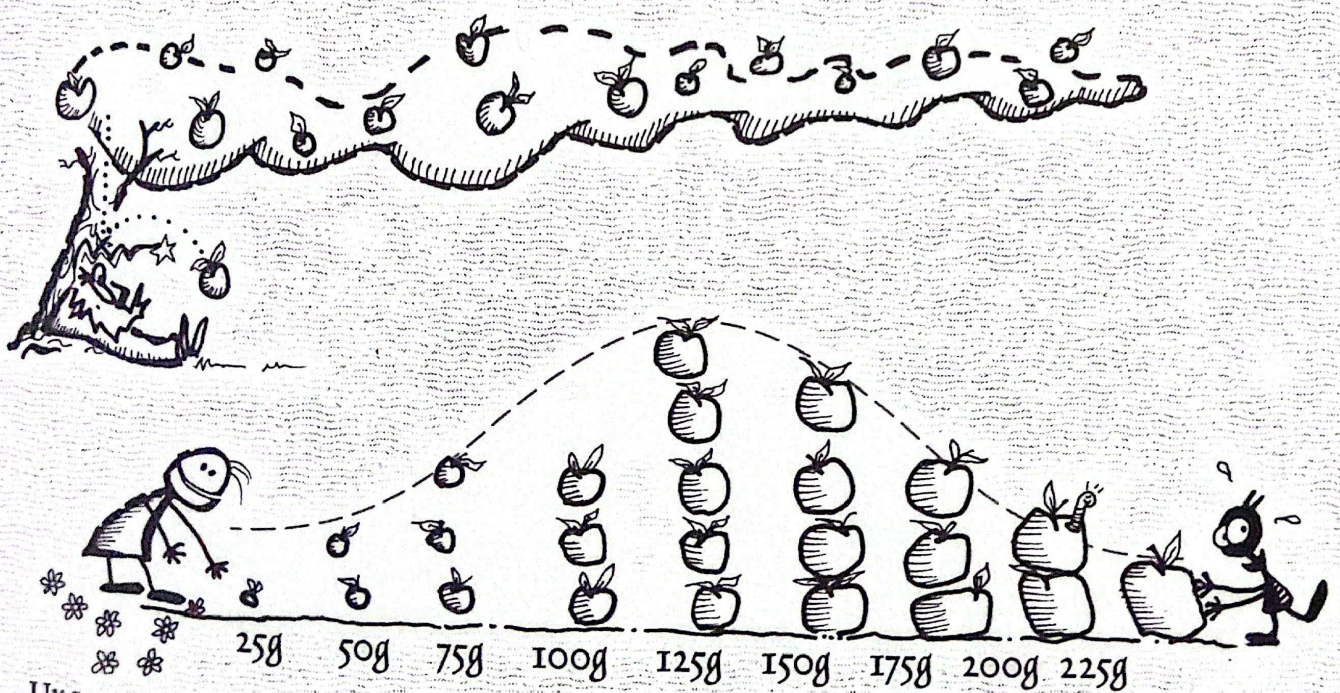
Desviación estándar



La desviación estándar σ se convierte en una unidad práctica con la que escalar el rango de muestras. Nótense las posiciones de los puntos de inflexión.

Un 68,27% queda dentro de σ de $\bar{x}$.
Un 95,45% de la muestra queda dentro de 2σ de $\bar{x}$.
Un 99,73% de la muestra queda dentro de 3σ de $\bar{x}$.

Orden de las manzanas por tamaños



Una muestra aleatoria de manzanas colocadas en vertical según un sistema de rangos de igual tamaño produce una gráfica de distribución de frecuencia. Con una muestra lo bastante grande, esta gráfica empezaría a aproximarse a una curva continua: la gráfica de una distribución normal (o gaussiana).

Leyes de Kepler y Newton

Cuerpos en movimiento

Johannes Kepler (1571-1630) descubrió tres leyes acerca del movimiento planetario que se aplican a todos los cuerpos que orbitan en el espacio:

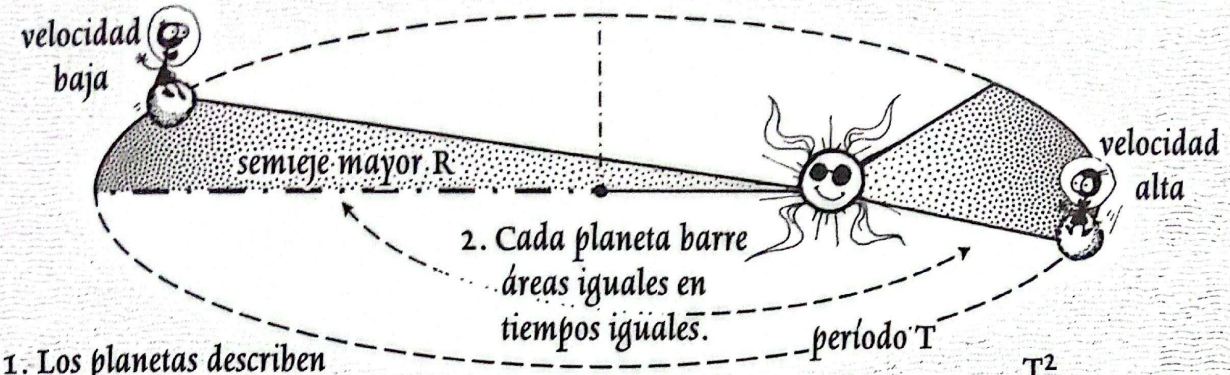
1. *Los planetas se desplazan en órbitas elípticas alrededor del Sol, que se encuentra en uno de sus focos.*
2. *Una línea trazada entre el Sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*
3. *El cuadrado del tiempo que un planeta tarda en orbitar el Sol dividido por el cubo de su semieje mayor* (*ver pág. 3*) *es una constante en todo el sistema solar.*

A partir de los descubrimientos llevados a cabo por Kepler, Isaac Newton (1643-1727) dedujo su ley de gravitación universal (*pág. 30*), y después sus leyes generales del movimiento:

1. *Un objeto en reposo o en movimiento permanecerá en dicho estado hasta que una fuerza actúe sobre él.*
2. *La aceleración producida por una fuerza en una masa determinada es proporcional a dicha fuerza.*
3. *Una fuerza ejercida por A en B siempre va acompañada de una fuerza igual ejercida por B en A, en la misma línea recta pero en sentido contrario.*

Albert Einstein (1879-1955) descubrió que a velocidades próximas a la de la luz, las Leyes de Newton requieren una modificación importante. (*ver pág. 54*).

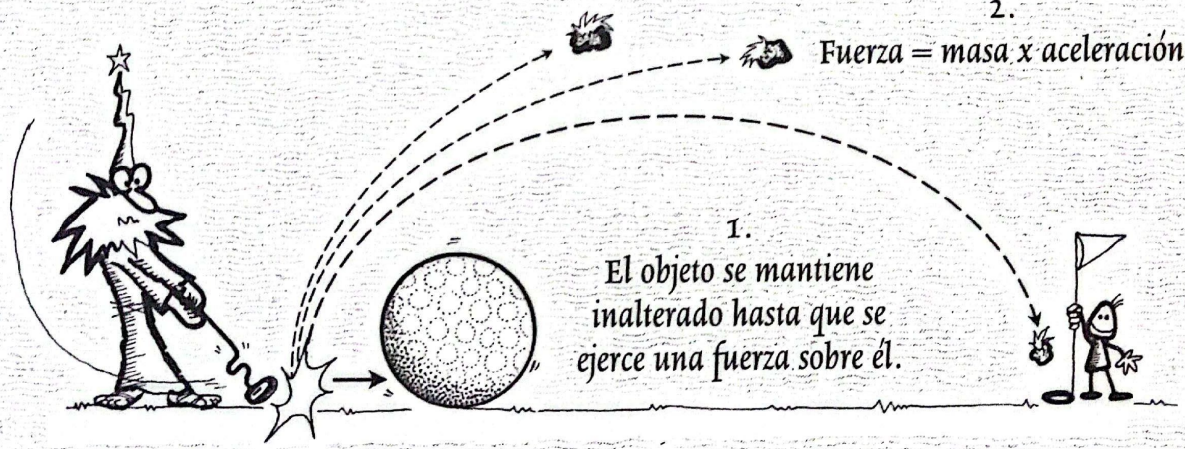
Ley de Kepler



1. Los planetas describen trayectorias elípticas, con el Sol en uno de los focos.

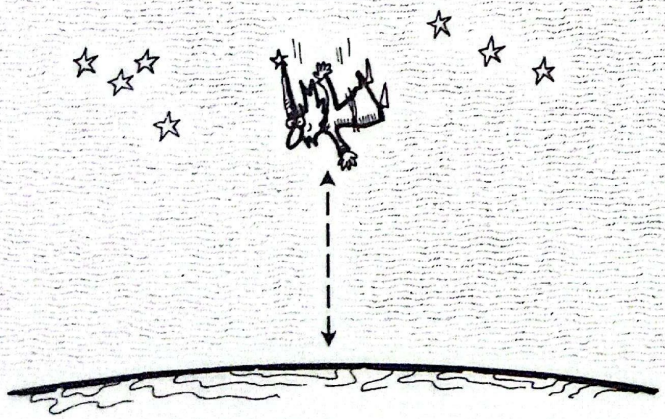
3. $\frac{T^2}{R^3}$ es constante

Ley de Newton



2.
Fuerza = masa x aceleración

1.
El objeto se mantiene inalterado hasta que se ejerce una fuerza sobre él.



3.
Un objeto que caiga sobre la Tierra ejercerá una fuerza gravitatoria igual y contraria en la Tierra. Sin embargo, esto apenas se percibe puesto que la Tierra, al tener una masa mucho mayor, no experimenta una aceleración notoria.

GRAVEDAD Y PROYECTILES

Caída de objetos sin plumas

Según la *ley de gravitación universal* de Newton, dos masas m_1 y m_2 separadas una distancia d ejercerán entre ellas fuerzas iguales y opuestas de magnitud F, por tanto:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d_2}$$

G es la *constante de gravitación universal* (*ver pág. 56*). Nótese que d es la distancia entre los *centros de masas* de m_1 y m_2.

Cerca de la superficie de la Tierra (masa m_2), d es constante, proporcionando la constante de *aceleración gravitatoria* «local» g:

$$g = \frac{Gm_2}{d_2} = 9{,}80665 \text{ m/sec}^2 \text{ por tanto } F = m_1g$$

Considerando la resistencia del aire despreciable, un objeto que caiga desde el reposo recorrerá s metros en t segundos, donde s y t están relacionados por:

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{o} \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

La velocidad del objeto en el tiempo t será $v = gt = \sqrt{2gs}$ m/seg. Nótese que estas cantidades son independientes de la masa.

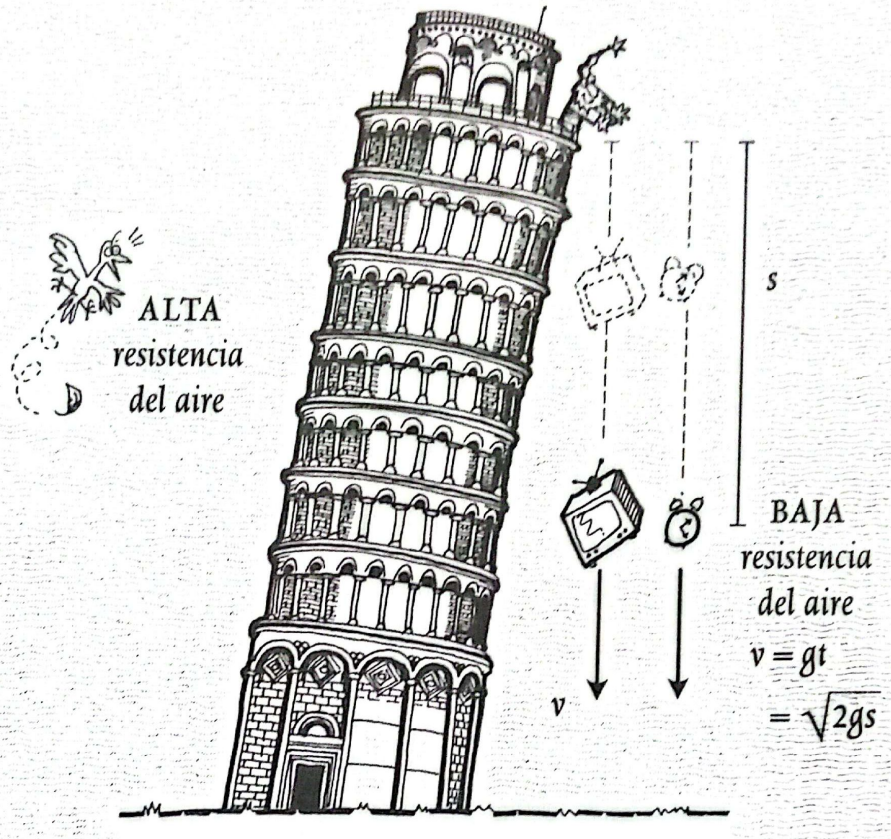
La trayectoria de un proyectil con una velocidad inicial v y un ángulo de trayectoria θ se expresa de este modo:

$$x(t) = vt\cos\theta \quad \text{y} \quad y(t) = vt\,\text{sen}\,\theta - \tfrac{1}{2}gt^2$$

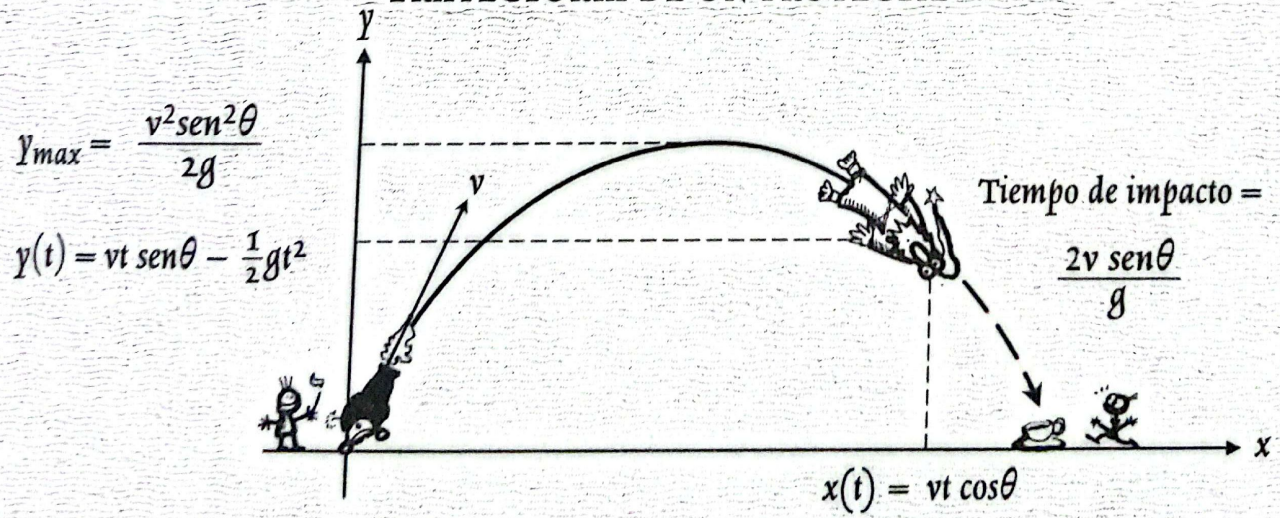
Estas coordenadas dependen del tiempo.

El experimento de Galileo

Las ecuaciones simples de movimiento solo tienen una aplicación real en un vacío. Se pueden utilizar perfectamente en muchos contextos, pero una descripción más completa debería tener en cuenta también la resistencia del aire. En el aire, una pluma cae mucho más despacio que un televisor.



Trayectoria de un proyectil



ENERGÍA, TRABAJO Y MOMENTO

Conservación en acción

Un objeto, de masa m, moviéndose en línea recta a una velocidad v posee *energía cinética* $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Esta energía la adquiere con el movimiento. Cuando una fuerza aplicada cambia la velocidad a u, el *trabajo* total realizado, W, es el cambio en la energía cinética: $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$.

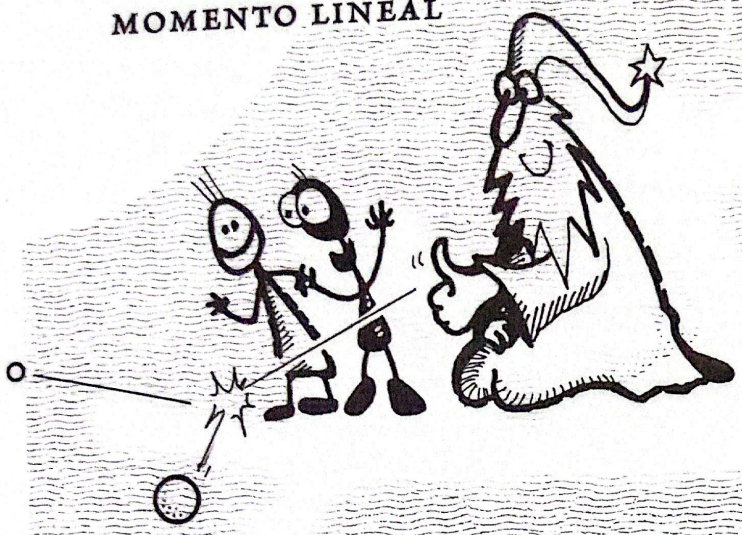
En general, el *trabajo* mide un intercambio de energía entre dos cuerpos. Si alguien levanta un objeto de masa m a una altura h por encima de su posición inicial realiza un trabajo, en este caso transfiriendo *energía potencial* gravitatoria, Ep, al objeto (que ahora puede caer). $E_p = mgh$ (mg es el peso del objeto, una fuerza).

Cuando el objeto cae, pierde altura pero gana velocidad, por tanto E_c aumenta a medida que E_p disminuye. Fricción aparte, la energía total del objeto $E = E_c + E_p$ permanece constante hasta que cae al suelo, cuando la energía cinética que le queda se disipa en forma de calor y ruido.

La cantidad de movimiento de un objeto se expresa como $p = mv$. Para una masa puntual m que rota sobre un eje a una distancia r, el *momento angular*, L equivale a $(mv)\,r = (m\omega r)r = mr^2\omega$ donde ω es la *velocidad angular* del cuerpo en radianes por segundo. $I = m\,r^2$ se conoce como el *momento de inercia*. La energía cinética rotacional de un sistema es, por tanto, $E_{cr} = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Un sólido rotatorio general se aborda como si fuese una masa puntual rotando sobre el mismo eje con el *radio de giro* correspondiente. Esto se ilustra en la página siguiente y se averigua con los métodos de cálculo (*págs. 50–51*). Si ninguna fuerza externa actúa sobre un sistema, su cantidad de movimiento total siempre se conserva.

Conservación del momento lineal



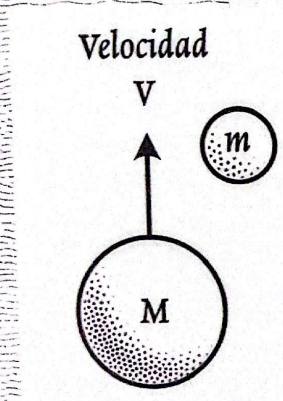
La energía cinética se conserva, por tanto

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mp^2 + \frac{1}{2}mq^2.$$

también porque la cantidad de movimiento se conserva:

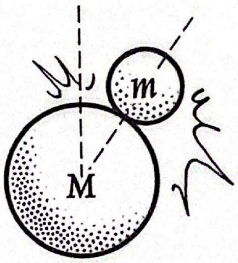
$Mp \operatorname{sen}\alpha - mq \operatorname{sen}\beta = 0$
(componente horizontal)

$Mp\cos\alpha + mq\cos\beta = Mv$
(componente vertical)

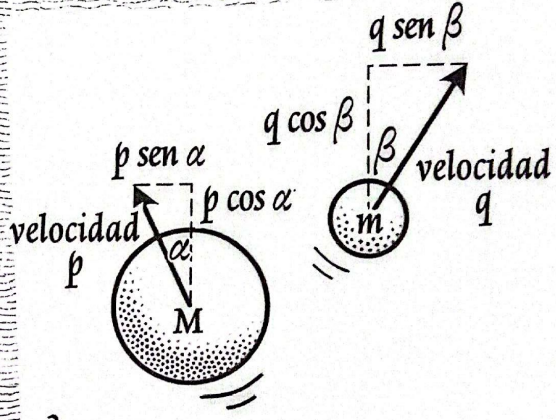


1.

Fuerza = variación de la cantidad de movimiento



2.



3.

Dos cuerpos (1) se encuentran (2) y se separan (3).

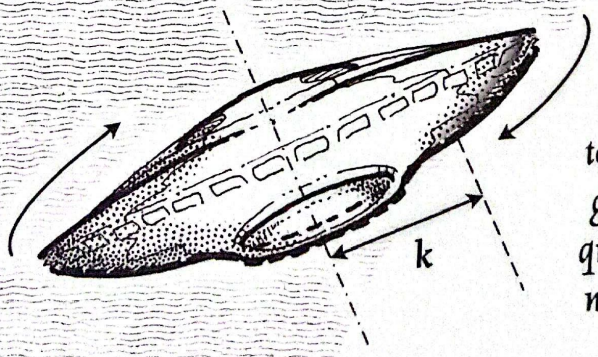
Sistemas giratorios

El momentto de inercia I de un cuerpo que rota sobre un eje sería

$$I = \Sigma mr^2 = \int r^2\, dm$$

El torque produce una aceleración angular

$$T = I\alpha$$



$$I = mk^2$$

donde M es la masa total y K es el radio de giro, la distancia a la que el momento sería el mismo si toda la masa se concentrará allí.

ROTACIÓN Y EQUILIBRIO

Remolinos, engranajes y poleas

Si un objeto de masa m atado a una cuerda de longitud r gira circularmente a una velocidad v, se producirá una *fuerza centrípeta*:

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r\,, \quad \text{acelerando} \quad a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

en dirección al centro, donde ω es la velocidad angular. La fuerza centrípeta es igual y opuesta a la tensión de la cuerda, que también se considera una fuerza. Una fuerza centrípeta hace que un cuerpo siga una trayectoria curva y actúa perpendicularmente al movimiento del mismo, hacia el centro instantáneo de la curvatura.

Dos engranajes conectados con t_1 y t_2 dientes, y velocidades r_1 y r_2 (en rpm u otra unidad) se relacionan mediante:

$$t_1 r_1 = t_2 r_2 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad r_1 = \frac{t_2}{t_1} r_2 \ \text{ y } \ r_2 = \frac{t_1}{t_2} r_1$$

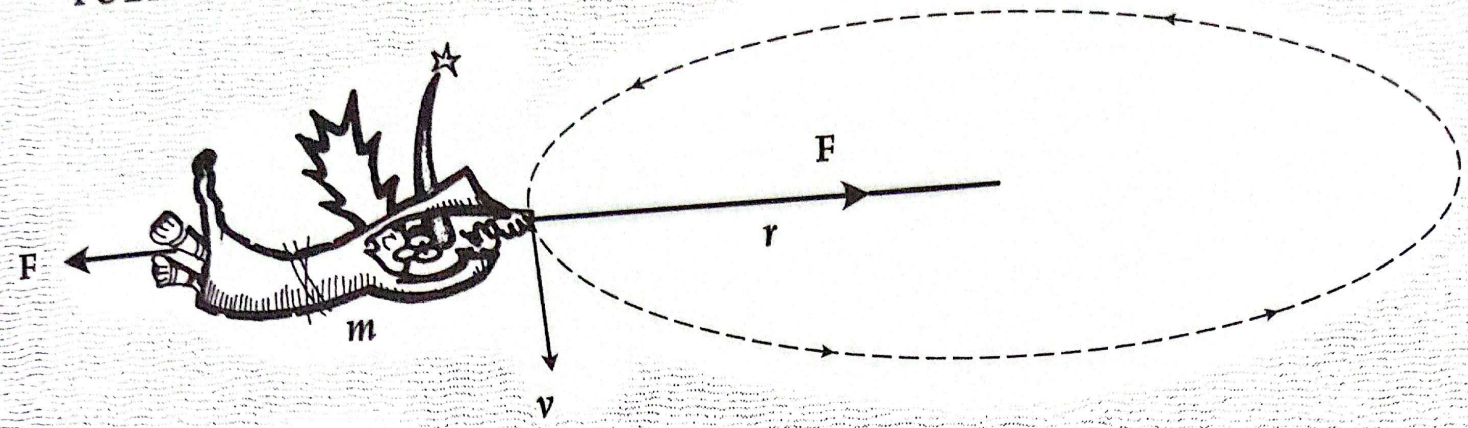
La ecuación también se aplica para dos poleas de correa de diámetros t_1 y t_2, y velocidades r_1 y r_2.

Si dos objetos con pesos w_1 y w_2 están en equilibrio, como se ilustra en la página siguiente, a distancias d_1 y d_2 de un punto de apoyo, el *torque* asociado a ambos objetos debe ser igual. El torque es el producto de la fuerza y la distancia radial:

$$d_1 w_1 = d_2 w_2$$

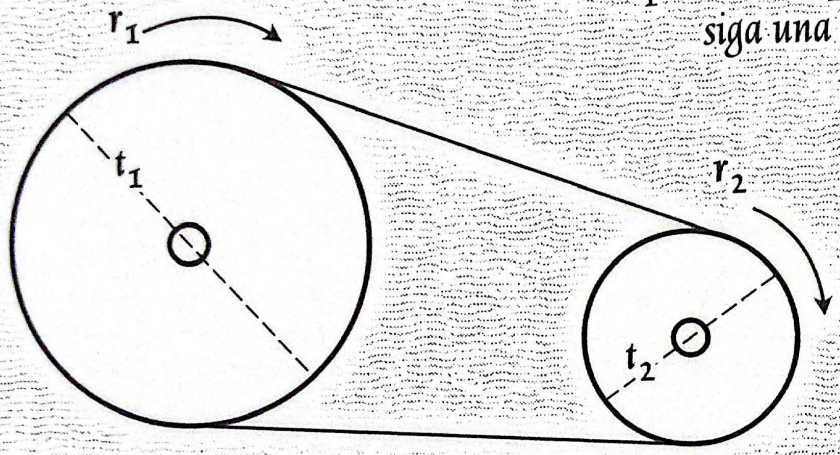
Una llave de mango largo gira una tuerca con más facilidad que una de mango corto porque genera un torque mayor.

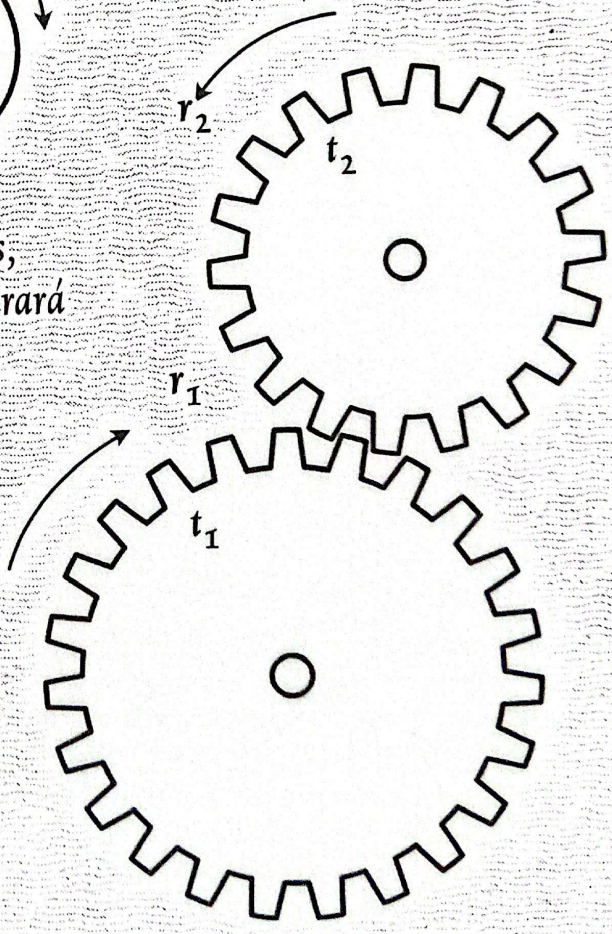
Fuerza centrípeta



Una fuerza centrípeta, F, hace que un cuerpo siga una trayectoria curva.

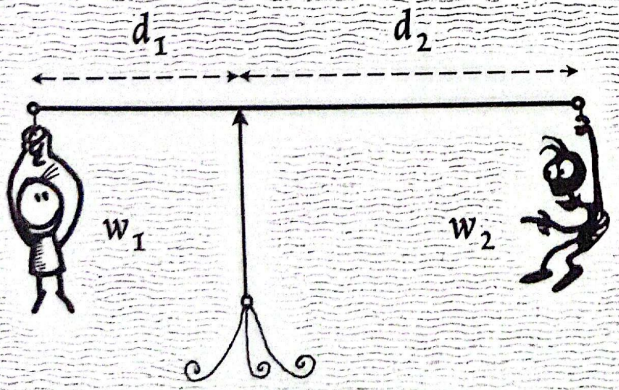
Engranajes y poleas





Ejemplo: un par de ruedas o engranajes conectados, de diámetros o número de dientes t1 = 23 y t2 = 18 girará a velocidades r1 y r2 de modo que $r_2 = \frac{23}{18} r_1$.

Torque y equilibrio



Dos cuerpos en equilibrio con un torque igual.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Fenómenos de vibración y oscilación

Galileo Galilei (1564-1642) descubrió que el *período* T de un péndulo, el tiempo que tarda en balancearse de un lado al otro y volver, es independiente de su *amplitud*, el desplazamiento máximo desde el centro. Por tanto un péndulo de longitud l completa f oscilaciones por segundo, tanto si estas son amplias como estrechas. Aquí f es la *frecuencia* del péndulo.

Si l se indica en metros, el período T se indica en segundos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{f}$$

donde g es la aceleración gravitatoria en la superficie de la Tierra (aprox. 9,81 m/s², *ver pág. 30*).

En pequeñas oscilaciones, inferiores a 5°, los péndulos se aproximan al *movimiento armónico simple*. El vaivén de una botella y un muelle también ejecutan un *m.a.s.*, igual que muchos otros fenómenos vibratorios y oscilantes. Las energías potencial y cinética se intercambian continuamente. La energía potencial y la aceleración del objeto vibrante alcanzan un máximo cuando la energía cinética y la velocidad son mínimas, y viceversa.

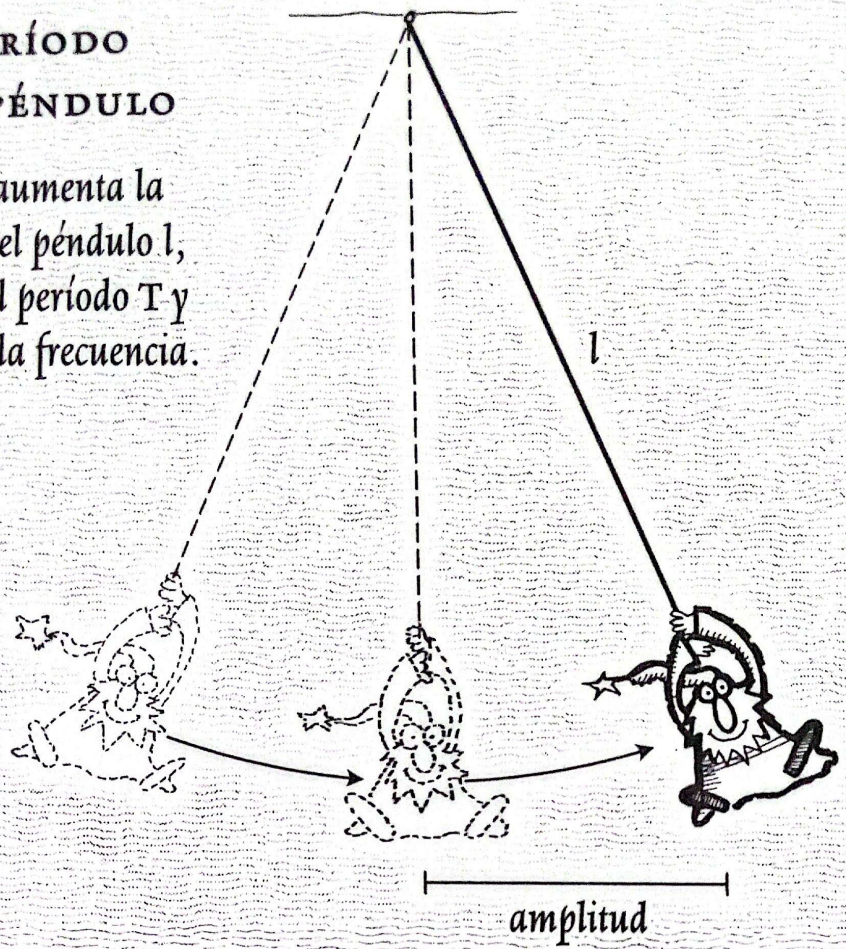
Una manera sencilla de generar un *m.a.s.* consiste en proyectar un movimiento circular uniforme sobre un eje como se ilustra en la página siguiente, con lo que:

$$d(t) = a \operatorname{sen} \omega t$$

donde a es la amplitud y ω la velocidad angular. Por tanto el período es $\frac{2\pi}{\omega}$ segundos por ciclo y la frecuencia es recíproca al período, $\frac{\omega}{2\pi}$ ciclos por segundo.

El período de un péndulo

Cuando aumenta la longitud del péndulo l, aumenta el período T y disminuye la frecuencia.

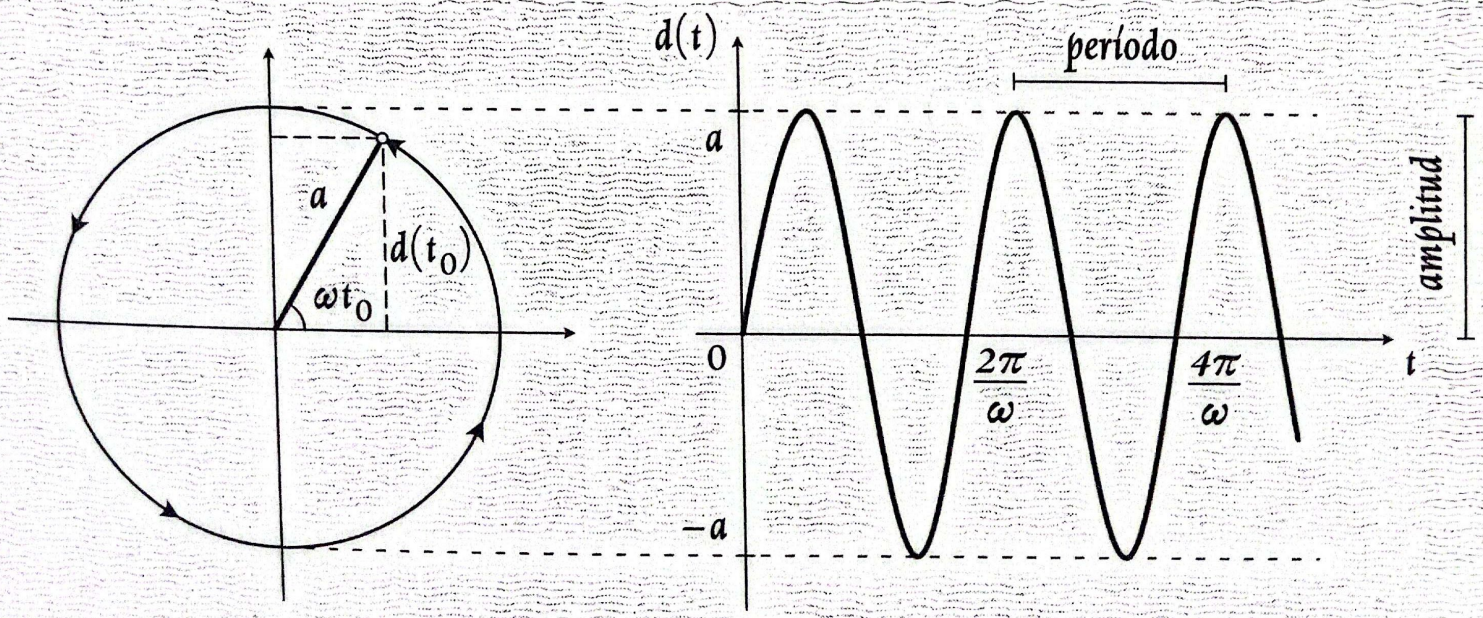


En relojería, un péndulo eficaz oscila cada dos segundos, cruzando la línea central cada segundo. Con T = 2, la fórmula

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

resulta en l = 0,994m, la longitud del péndulo de segundos que suelen incorporar los relojes de pie.

Movimiento armónico simple



La proyección del movimiento circular uniforme sobre el eje vertical resulta en un movimiento de arriba abajo no uniforme relacionado directamente con la función seno.

TENSIÓN, DEFORMACIÓN Y CALOR

Expansión, contracción, tensión y compresión

Cuando un material se estira o se aplasta, cambia de forma. La *tensión mecánica*, σ, en el material se define como la fuerza F por unidad de área A; la *deformación*, ε, se define como el cambio de longitud Δl, respecto a la longitud original, l_0. Por tanto, el *módulo de Young* E del material, llamado así por Thomas Young (1773-1829), será:

$$E = \frac{\textit{tensión}}{\textit{deformación}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l_0}$$

Las sustancias también poseen un *módulo de compresibilidad* K, inversamente proporcional a su *compresibilidad* volumétrica, y un *módulo de cizalladura* G, la relación entre tensión y deformación de corte (*pág. sig.*).

El calentamiento y el enfriamiento provocan la expansión y la contracción de materiales en una relación lineal con el aumento o la disminución de la temperatura. La *expansividad lineal*, α, de una sustancia relaciona su cambio de longitud Δl con el cambio de temperatura ΔT, de modo que $\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$, donde l_0 es la longitud inicial.

Según la *ley de Hooke*, llamada así por Robert Hooke (1635-1703), un muelle (u otro objeto elástico equivalente) estirado x unidades de distancia desde su posición de equilibrio vuelve a su posición inicial con una fuerza $F = kx$, donde k es la *constante elástica* del muelle en cuestión. En consecuencia, cuando se acopla un peso a un muelle vertical, el alargamiento es proporcional al peso.

Para que una estructura esté en equilibrio, las fuerzas totales en cualquier punto deben equilibrarse como se ilustra en la página siguiente.

Tensión y deformación

Tensión de corte

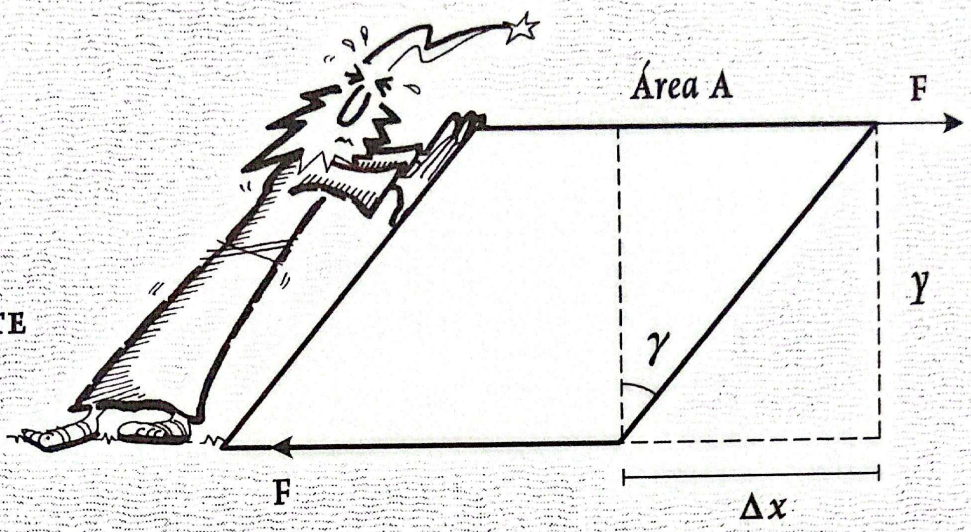
$$= \frac{\text{fuerza tangencial}}{\text{área}}$$

$$= \frac{F}{A}$$

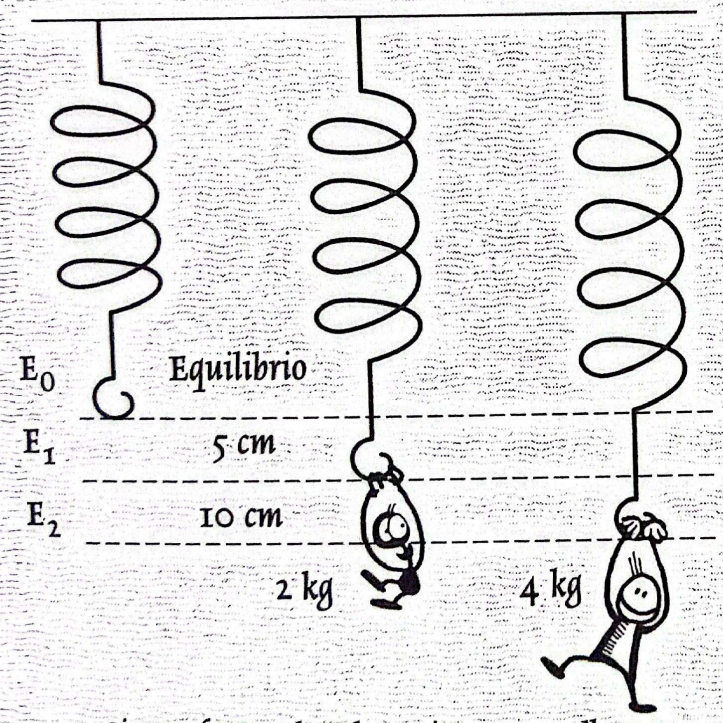
Deformación de corte

$$= \tan(\text{ángulo } \gamma)$$

$$= \frac{\Delta x}{y}$$

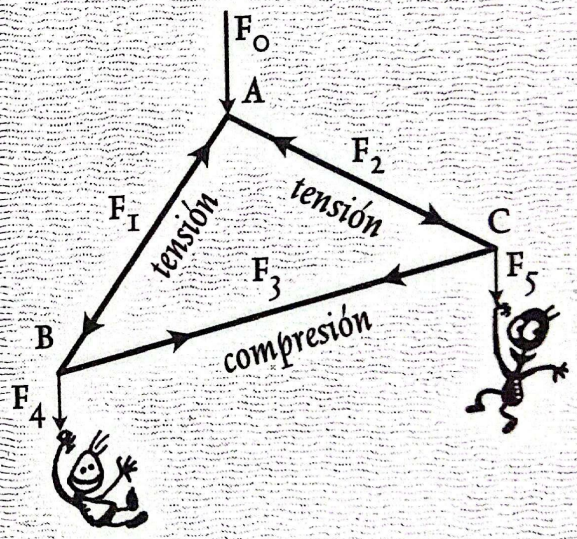


Ley de Hooke



Si una fuerza de 2 kg estira un muelle 5 cm, para estirarlo 10 cm necesitaremos una fuerza de 4 kg. Esta ley se aplica hasta cierto punto, denominado límite elástico.

Equilibrio de fuerzas



En cada punto existe un triángulo equilibrado de fuerzas.

Por ejemplo, en el punto A, los componentes horizontales y verticales de F_0, F_1 y F_2 se anulan a cero. Lo mismo sucede en los puntos B y C.

LÍQUIDOS Y GASES

Temperatura, presión y flujo

Un líquido que fluya a una velocidad v por una tubería con un área transversal A tendrá una tasa de flujo q, donde $q = Av$.

Un líquido que fluya por dos tuberías con áreas transversales A_1 y A_2, ambas sometidas a la misma presión, tendrá velocidades de flujo v_1 y v_2, donde $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

Según el *principio de Pascal* (*pág. sig., ar.*), la presión que se aplica a un líquido dentro de un recipiente de cualquier forma se transmite de manera uniforme por el mismo, donde la presión se define como fuerza por unidad de área. En el ejemplo de la página siguiente, $F_1 A_2 = F_2 A_1$.

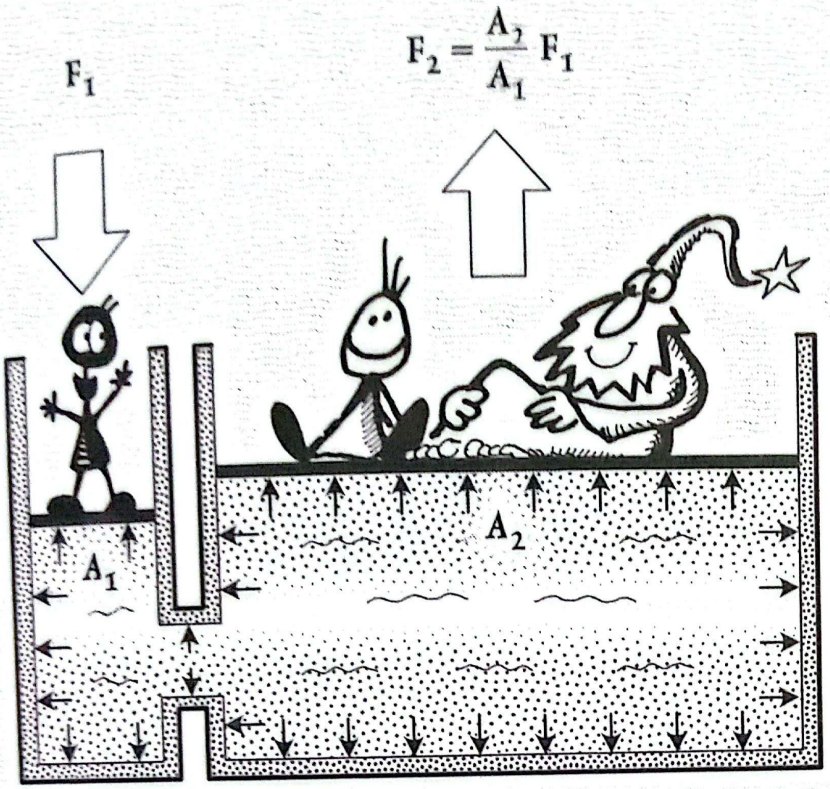
Según la *ecuación de Bernoulli* (*pág. sig., ab.*), un cambio de altura provoca un cambio de presión de un líquido: $p_1 + h_1 \rho g = p_2 + h_2 \rho g$, donde ρ es la densidad media del fluido, y g es la aceleración a causa de la gravedad (aprox. 9,81 m/s² en la superficie de la Tierra, *véase pág. 30*).

En cuanto a los gases, según la *ley de los gases ideales* si una determinada cantidad de gas posee una presión P, un volumen V y una temperatura T (en grados *Kelvin*), entonces PV es proporcional a T. La escala de Kelvin es una medida de *temperatura absoluta*, donde °K = °C + 273,15. Dado un sistema cerrado con una presión, un volumen y una temperatura iniciales P_1, V_1 y T_1, y valores posteriores P_2, V_2 y T_2:

Según la *ley de Charles*: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ para una presión constante.

Según la *ley de Boyle*: $P_1 V_1 = P_2 V_2$ para una temperatura constante.

Principio de Pascal

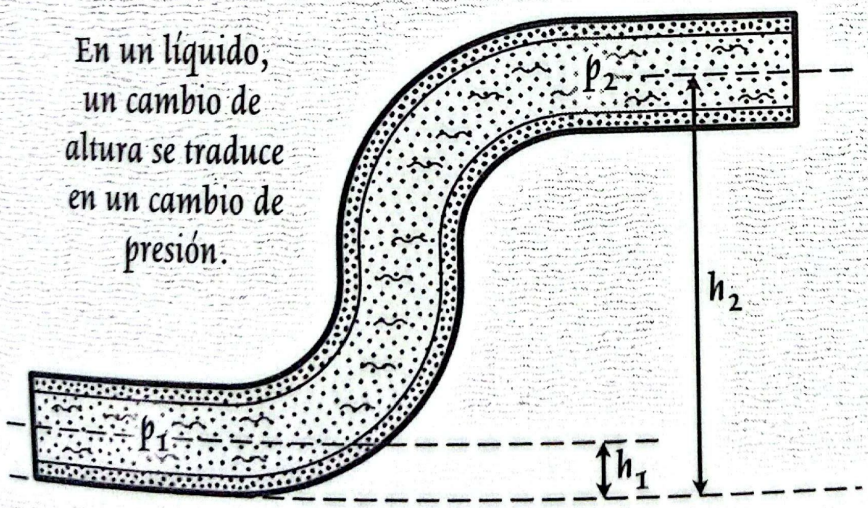


Si se ejerce una pequeña fuerza en una pequeña área de líquido, puede generarse una gran fuerza en una gran área de dicho líquido.

La presión que se aplica a un líquido contenido en un recipiente de cualquier forma se transmite de modo uniforme por él. Se trata del principio de Pascal, la base de la hidráulica.

Ecuación de Bernoulli

En un líquido, un cambio de altura se traduce en un cambio de presión.



$$p_1 + h_1 \rho g = p_2 + h_2 \rho g$$

ρ denota la densidad media del fluido, expresada como masa/volumen.

P.ej. Para el agua $\rho = 1$ en las unidades métricas de g/cm^3.

Otros valores of ρ:
Alcohol: 0,785
Salmuera: 1,23
Glicerina: 1,26
Mercurio: 13,59
Aceite oliva: 0,911
Propano: 0,494

SONIDO

Longitudes de onda armónicas y sirenas

Si atamos una cuerda entre dos puntos a una distancia L, como se muestra, las longitudes de onda de los armónicos de la cuerda se expresarán:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Solo serán audibles λ_1 y los primeros *sobretonos.*

Si W_T es la velocidad de onda en la cuerda, T su tensión (en newtons) y μ la masa por unidad de longitud (en kg/m), las frecuencias básicas, v_n, (en ciclos por segundo) son:

$$v_n = \frac{W_T}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} W_T = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

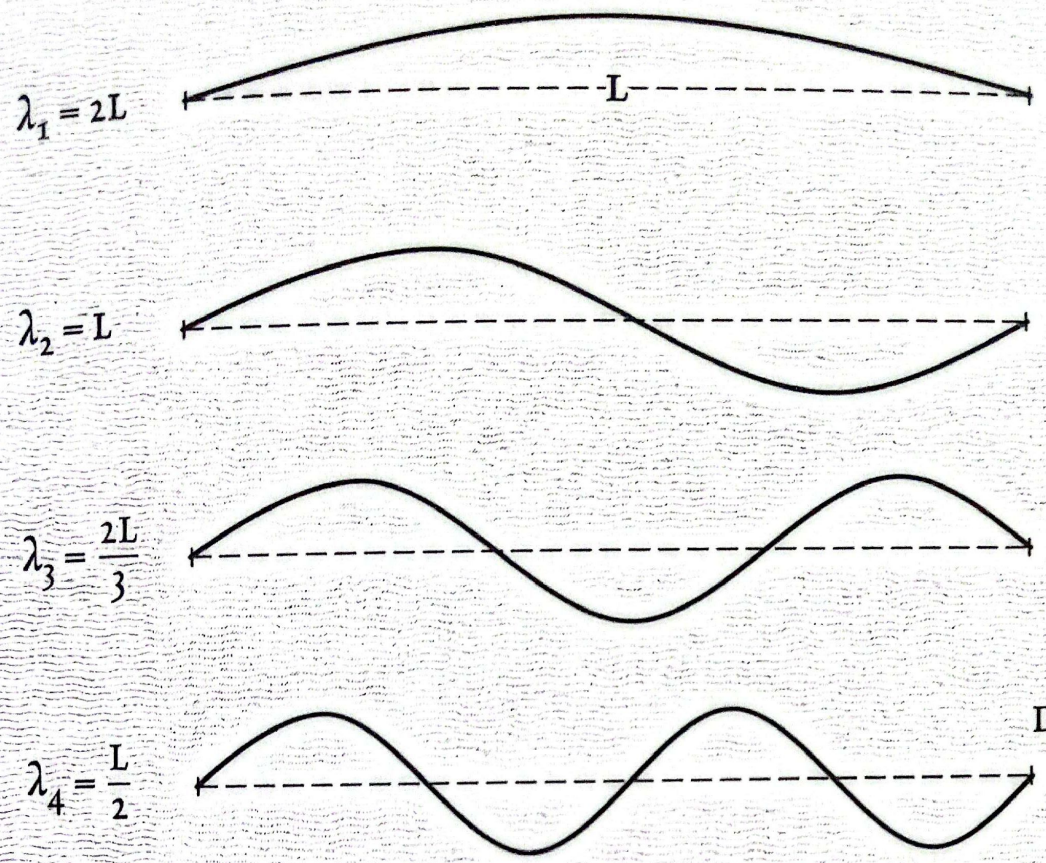
El tono de la sirena de una ambulancia parece cambiar a medida que avanza. Es lo que se conoce como *efecto Döppler.* Si una persona se desplaza a una velocidad v_o *hacia* una fuente de frecuencia f_s, que a su vez avanza a una velocidad v_s *hacia* la persona, entonces para una onda de velocidad c la frecuencia observada f_o será:

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

Nota: si los objetos se alejan en lugar de acercarse, utilice valores negativos para v_o y v_s (la velocidad del sonido es 331,45 m/seg).

Si dos tonos muy parecidos, de frecuencias f_1 y f_2, suenan al unísono, podría oírse una *frecuencia de batimiento* $f_{bat} = (f_2 - f_1)$.

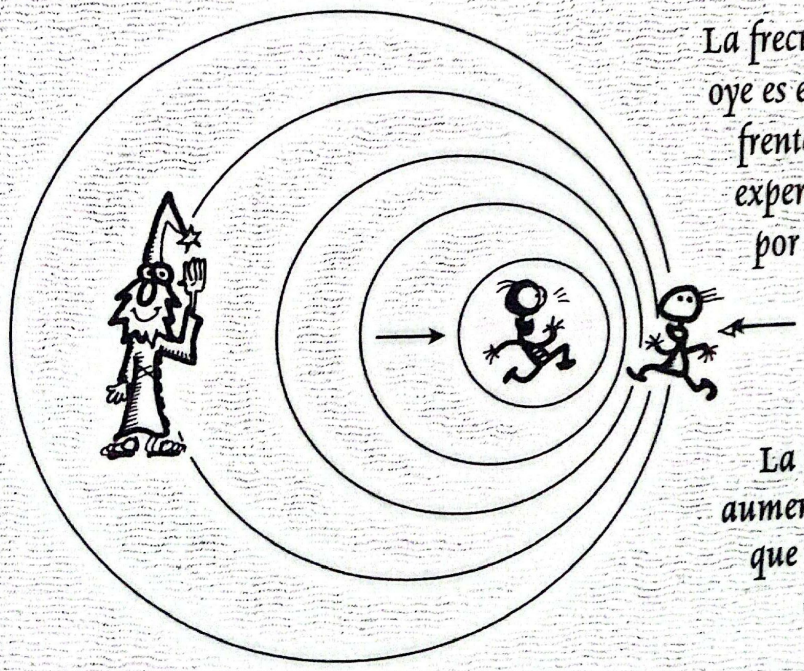
Una serie de sobretonos



El efecto Doppler

Cuando una fuente de sonido se desplaza con respecto a un observador, el tono parece cambiar.

La frecuencia que se oye es el número de frentes de onda experimentados por segundo.



La frecuencia baja a medida que el objeto se aleja.

La frecuencia aumenta a medida que el objeto se acerca.

LUZ

Refracción, lentes y relatividad

La luz que viaja por el aire y se sumerge en el agua se muestra en la página siguiente. Si v_1 y v_2 ason las velocidades que la luz toma en dos medios, entonces la *ley de refracción de Snell* establece que para una determinada frecuencia:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \text{constante} \quad \text{o} \quad n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

donde n_1 y n_2 son los *índices de refracción* de ambos medios (algo diferentes para frecuencias distintas). A continuación, algunos valores prácticos:

Vacío y aire: 1 *Agua*: 1,33 *Cuarzo*: 1,45 *Vidrio crown*: 1,52

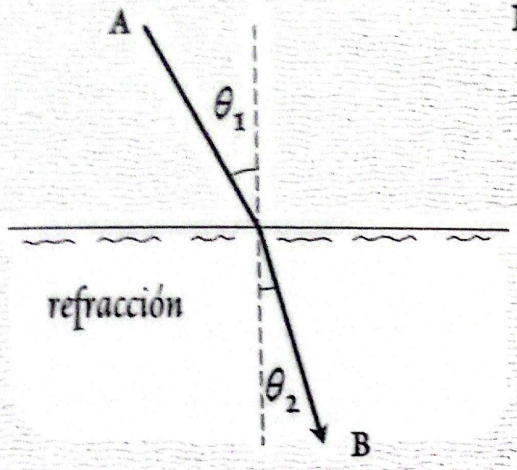
En la página siguiente se ilustran varias lentes, unas convergentes y otras divergentes, con la *distancia focal*, *f*, de una de ellas. La *ecuación de Gauss de las lentes* relaciona las distancias entre un objeto, la lente y la imagen enfocada invertida:

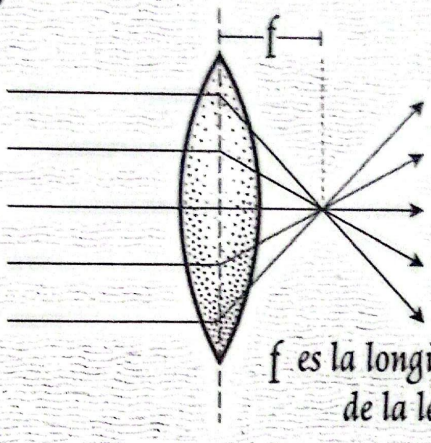
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{medio}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Aquí *R1* y *R2* son los *radios de curvatura* izquierdo y derecho de la lente (negativos si es cóncava).

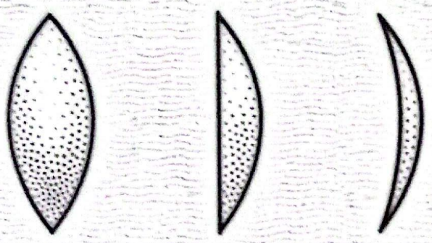
La luz visible es una parte muy pequeña del *espectro electromagnético* que también incluye ondas de rayos X, ondas de radio y microondas. Einstein dedujo que, como la luz viaja a una velocidad constante independientemente de la velocidad a la que nos movamos, el tiempo puede estirarse y dilatarse. Esta premisa forma parte de su *teoría de la relatividad especial* (*pág. 54*).

Lentes



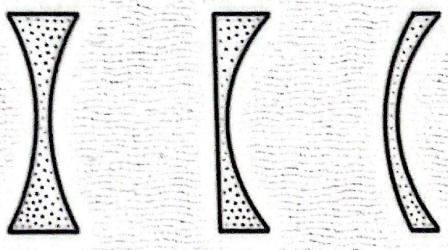


f es la longitud focal de la lente



biconvexa — plano convexa — menisco convergente

Lentes convergentes

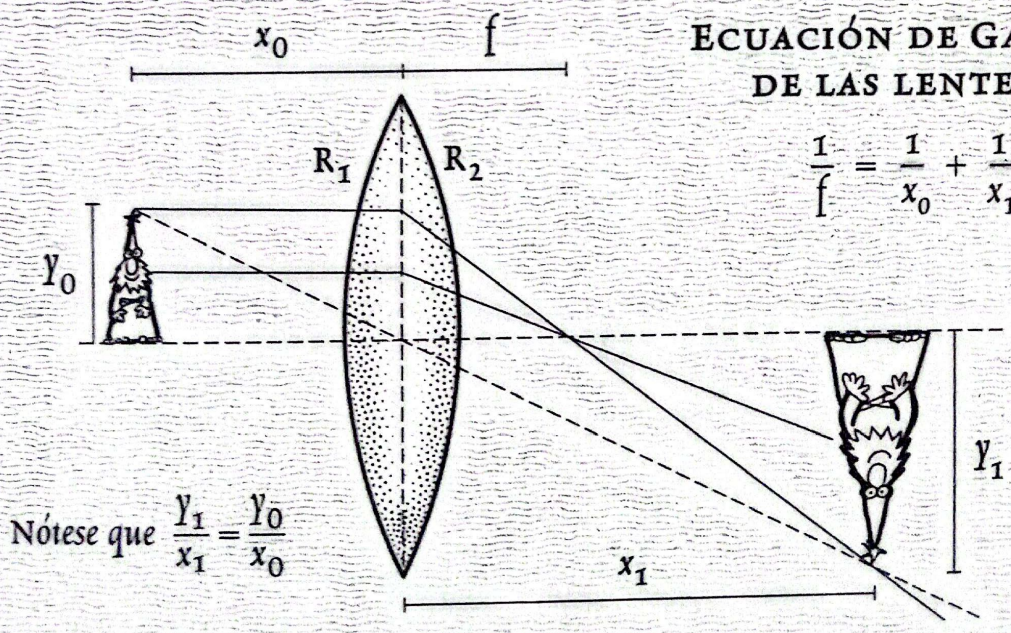


bicóncava — plano cóncava — menisco divergente

Lentes divergentes

Ecuación de Gauss de las lentes

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}$$



Nótese que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_0}{x_0}$

ELECTRICIDAD Y CARGA

Sintonizar el circuito

En un circuito eléctrico sencillo, el *voltaje* E (en voltios) a través de una *resistencia* R (en ohmios, Ω) produce una *corriente* I (en amperios) definida por la *ley de Ohm*, $E = I\,R$. Por tanto, la *potencia* P (en vatios) del circuito será:

$$P = EI = I^2R$$

Las resistencias en serie dan una resistencia de $R_s = R_1 + \ldots + R_n$ ohmios. Los condensadores en paralelo dan una capacidad de $C_p = C_1 + \ldots + C_n$ faradays. Las resistencias en paralelo y los condensadores en serie se combinan para dar como resultado:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}} \qquad C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

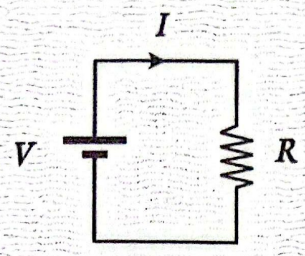
En la página siguiente se ilustran varias ecuaciones de circuitos con inductores. Todos los efectos eléctricos son el resultado de la *carga* (medida en culombios). La carga de un electrón es $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Según la *ley de Coulomb*, la fuerza F entre dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 separadas por una distancia de r metros se expresa de este modo:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde ε_0 es la *permitividad magnética del vacío*, $8{,}85 \times 10^{-12}$ farad/m.

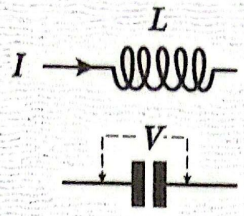
Un *diodo* actúa como una válvula de retención, y los *transistores* son más parecidos a un grifo o una llave de paso, donde un voltaje de la base (B) controla el flujo de corriente del colector (C) al emisor (E). Pueden usarse como interruptores o amplificadores (*véase «amplificador sencillo», pág. sig.*).

Circuito sencillo



$V = IR$

Energía almacenada



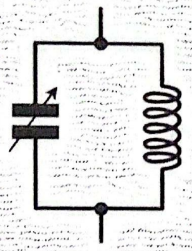
en un inductor:

$= \frac{1}{2} LI^2$

en un condensador:

$= \frac{1}{2} CV^2$

Circuito resonante paralelo

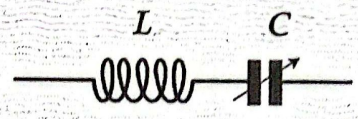


frecuencia sintonizada

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

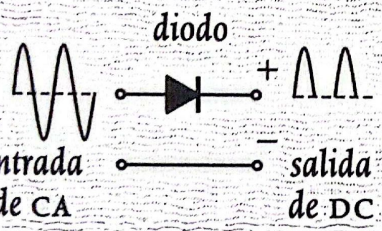
picos de voltaje respecto a la frecuencia sintonizada

Circuito resonante en serie

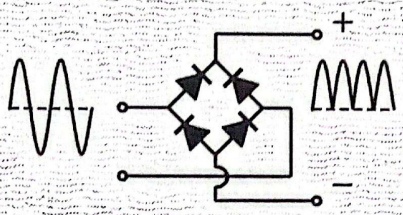


Picos de corriente respecto a la frecuencia sintonizada

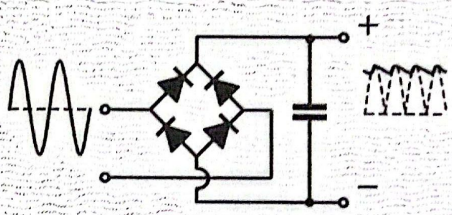
Rectificadores de diodo



Rectificador de media onda



Rectificador de onda completa (puente)



Rectificador de onda completa con filtro

Amplificador sencillo

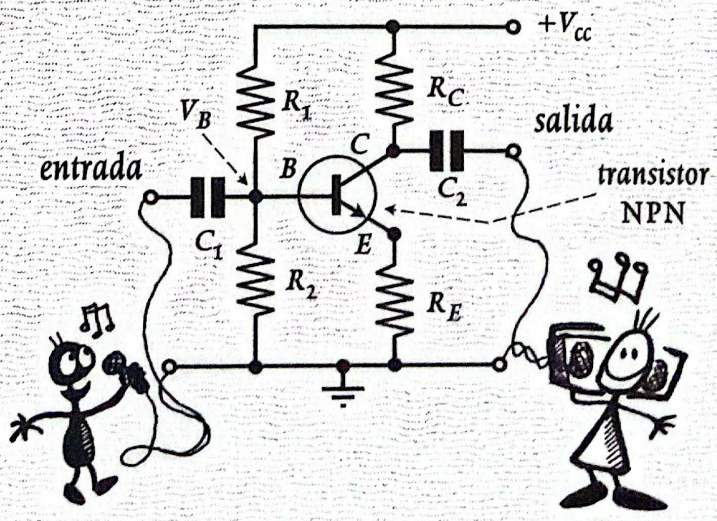
La ganancia de voltaje se expresa:

$$\frac{R_C}{R_E} = \frac{V_{salida}}{V_{entrada}}$$

R_1 y R_2 son resistores de polarización, donde:

$$V_B = \frac{V_{cc} R_2}{R_1 + R_2}$$

C1 y C2 son condensadores de acoplamiento.



CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Carga, flujo y manos

En un campo electromagnético la carga se comporta de manera similar a la masa en un campo gravitatorio. La fuerza **F** en una carga Q en movimiento en un campo electromagnético de intensidad de campo eléctrico **E** se expresa $\mathbf{F} = \mathbf{E}Q$. La fuerza **F** en un cable que lleva una corriente I y tiene una longitud l es $\mathbf{F} = \mathbf{B}\,I\,l$, donde **B** es la *densidad* del flujo *magnético*, expresada en *teslas*. En la página siguiente se muestran otras situaciones (μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, la constante magnética). Nota: las cantidades en negrita son vectores, con direcciones y magnitud.

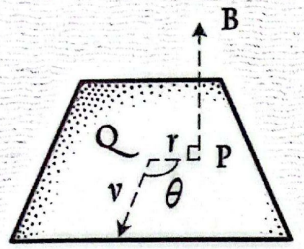
Una carga puntual Q moviéndose a una velocidad v crea un campo magnético **B** (*pág. sig., ar. izqda.*). Si el punto P está a una distancia r de Q y a un ángulo θ de la dirección del movimiento, según la *ley de Biot-Savart*:

$$\mathrm{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{Qv\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}$$

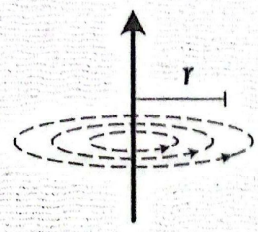
Un campo magnético en movimiento produce un campo eléctrico, y viceversa. Con imanes y corrientes en bobinas, la energía eléctrica puede transformarse en mecánica (*un motor*), y viceversa (*una dinamo*). Las reglas de las manos de Fleming se aplican respectivamente (*pág. sig., ab.*).

Para diseñar este tipo de cosas suele ir bien la *ley de inducción de Faraday* (una de las cuatro ecuaciones de Maxwell), según la cual la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es proporcional a la variación del flujo magnético, o $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, donde $\nabla\times$ es el *operador rotacional*, y la *ley de Lenz*, según la cual una corriente inducida va siempre en sentido opuesto al movimiento o la carga que la provocan.

Cálculo de la fuerza del campo magnético

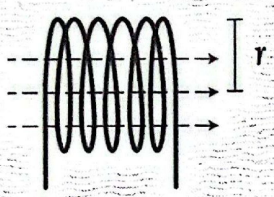


La corriente avanza en la dirección del movimiento de la carga positiva.



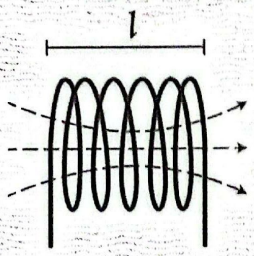
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Fuerza del campo a una distancia r de un cable



$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r}$$

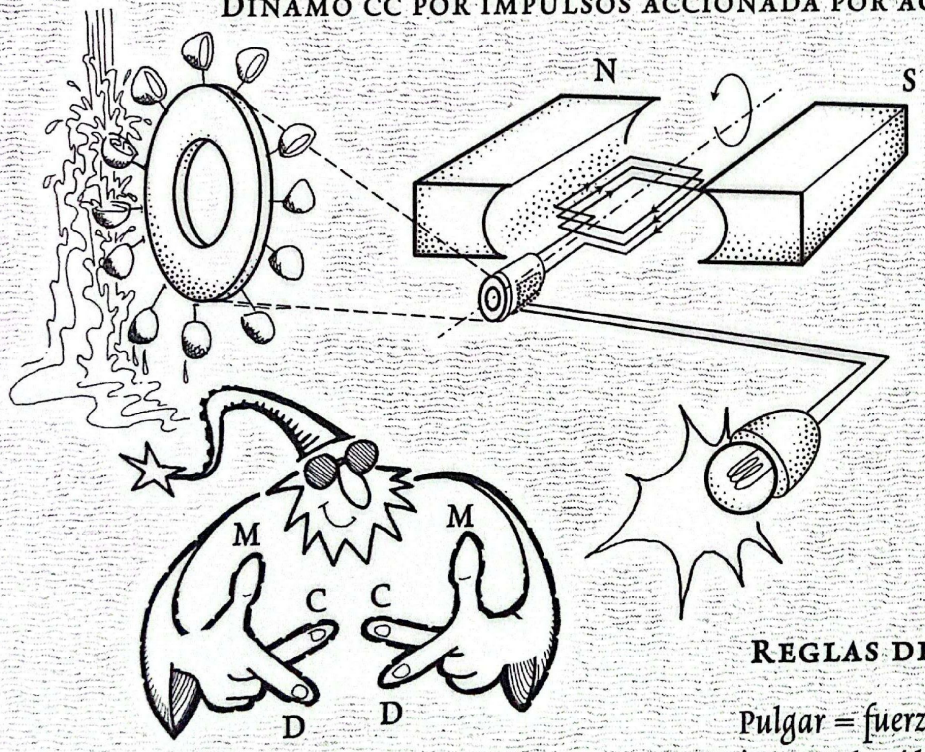
Para una bobina de radio r con N espiras.



$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

Para una espiral con N giros en longitud l.

Dinamo CC por impulsos accionada por agua



Torque = AFIN

donde:
A = área de la bobina
F = fuerza del campo magnético
I = corriente inducida
N = número de vueltas del circuito

Reglas de Fleming

Pulgar = fuerza (Movimiento)
Dedo índice = densidad de flujo magnético
Dedo medio = corriente

mano derecha
DINAMO

mano izquierda
MOTOR

CÁLCULO

Diferenciación e integración

El cálculo recurre a infinitesimales y límites para solucionar dos problemas: la tasa de variación instantánea de una función y el área exacta bajo una curva.

La gráfica de la función $y = f(x)$ en la posición $(a, f(a))$ posee una pendiente $f'(a)$, donde la funcción $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ se denomina la *derivada* de f. Para cada x, $f'(x)$ es la tasa de variación de f en x. Para calcular directamente este tipo de derivadas en a se tienen en cuenta las pendientes de las rectas que pasan por $(a, f(a))$ y $(a+\varepsilon, f(a+\varepsilon))$ para valores cada vez más pequeños de ε. Si tienden a un «límite», la tasa de variación de f en a puede definirse como este límite.

Si $x(t)$ denota la posición de un objeto en un tiempo t, su velocidad $v(t)$ en un tiempo t será $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Su aceleración $a(t)$, la variación de la velocidad en t, será entonces $x''(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$.

Supongamos que tenemos una función (*pág. sig.*) y buscamos el área bajo su gráfica entre a y b. El intervalo entre a y b se divide en una cantidad cada vez mayor de longitudes iguales. Esto produce una cantidad cada vez mayor de rectángulos que van estrechándose, la suma de cuyas áreas puede averiguarse fácilmente en cada fase. El área bajo la curva se expresa mediante el límite de estas sumas, $\int_a^b f(x)dx$. Si $F(x)$ cumple que $F'(x) = f(x)$, entonces, de manera extraordinaria, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

$F(x)$ se denomina la *integral indefinida* o *antiderivada* de f y se denota $\int f\,dx$. Al igual que $(F(x) + c)' = F'(x)$, se deduce que en todas las antiderivadas de la página siguiente hay una constante arbitraria.

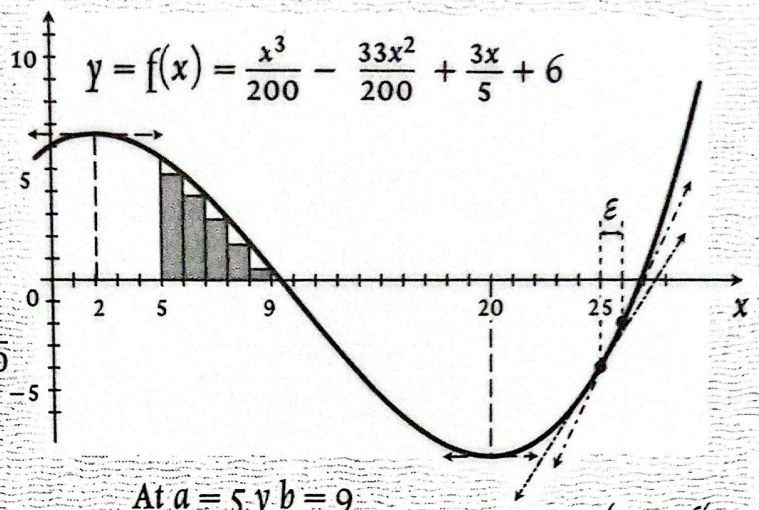
Diferenciación e integración

La diferenciación produce derivadas:

$$f(x) = \frac{x^3}{200} - \frac{33x^2}{200} + \frac{3x}{5} + 6$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{3x^2}{200} - \frac{33x}{100} + \frac{3}{5}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{df}{dx}(f'(x)) = \frac{3x}{100} - \frac{33}{100}$$



La integración produce la antiderivada:

$$F(x) = \frac{x^4}{800} - \frac{11x^3}{200} + \frac{3x^2}{10} + 6x + c$$

que cumple $F(x) = f(x)$

At $a = 5$ y $b = 9$

$$\int_5^9 f(x)\,dx = F(9) - F(5)$$

$$\approx 46.4 - 31.4 \approx 15$$

$(a+\varepsilon, f(a+\varepsilon))$

$(a, f(a)) = (25, -4)$

$f'(2) = 0$ y $f''(2) < 0$

$f(x)$ posee un mínimo local en $x = 2$

$f'(20) = 0$ y $f''(20) > 0$

$f(x)$ posee un mínimo local en $x = 20$

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(25) = 1.725$$

Derivadas e integrales

$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$ $\quad \frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$

$\int f\frac{dg}{dx}\,dx = fg - \int g\frac{df}{dx}\,dx$ ← integration by parts

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$ $\quad \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dx}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}$

$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \frac{d}{dx}ax^n = anx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}C = 0$ for constant C $\quad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax$

$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \frac{d}{dx}\cos ax = -a\sin ax$

$\frac{d}{dx}\log_e ax = \frac{1}{x}$ $\quad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$ $\quad \frac{d}{dx}\tan ax = a\sec^2 ax$

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $\quad \int \log_e x\,dx = x\log_e x - x$

$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$ $\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log_e x$ $\quad \int e^x\,dx = e^x$ $\quad \int \sec x\,dx = \log(\tan x + \sec x)$

$\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x$ $\quad \int \csc x\,dx = \log\tan\frac{x}{2}$

$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$ $\quad \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ $\quad \int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$

$\int \sin x\,dx = -\cos x$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}$ $\quad \int \cot x\,dx = \log\sin x$

$\int \tan x\,dx = -\log\cos x$

NÚMEROS COMPLEJOS

En el reino imaginario

Los conocidos *números reales* forman parte del reino más grande de los *números complejos*. Estos se construyen empezando por la *unidad imaginaria* o i, que cumple (al contrario que un número real):

$$i^2 = -1 \text{ o } i = \sqrt{-1}\,.$$

Dados dos números reales a y b, la cantidad $a + bi$ se denomina un número complejo. A continuación, algunas ecuaciones complejas:

$$a + bi = c + di \text{ si y solo si } a = c \text{ and } b = d$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i$$

La *representación polar* utiliza el ángulo θ y el radio r:

$$z = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

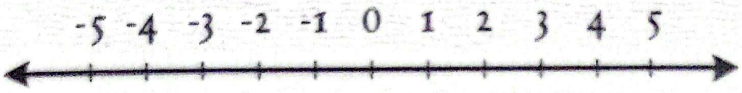
La función exponencial e^x puede extenderse al plano complejo mediante la *ecuación de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A partir de esto obtenemos la joya matemática $e^{i\pi} = -1$, y el *teorema de De Moivre* para potencias de un número complejo z:

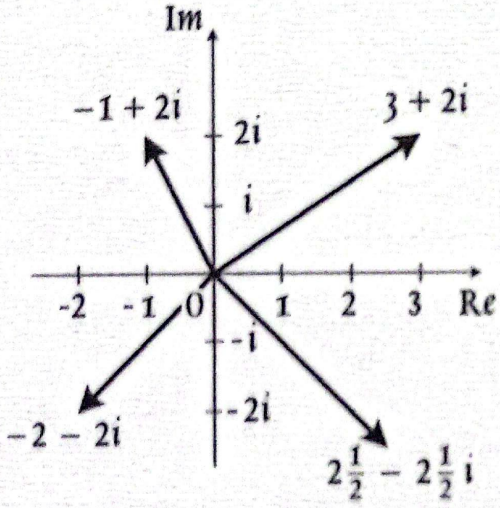
$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$$

Números reales



La recta real no solo contiene los números enteros positivos y negativos, sino también todas las fracciones positivas y negativas y números irracionales como $\sqrt{2}$ y π.

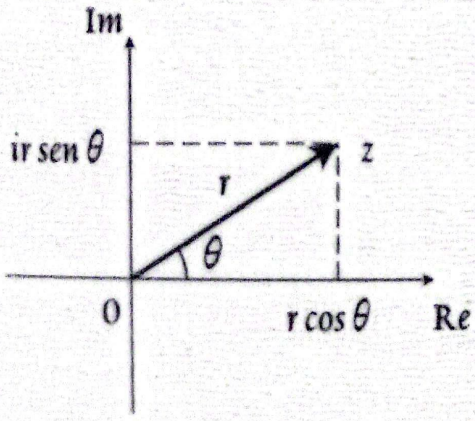
Números complejos



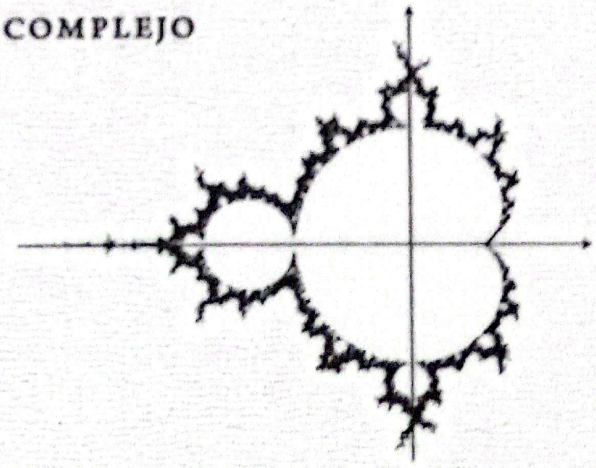
La recta real se convierte en el eje Re(al) en el plano de números complejos. Cada punto del plano corresponde a un número complejo, y viceversa.

Los números del eje Im(aginario) se denominan «números imaginarios puros» siendo su parte real igual a 0.

Plano complejo

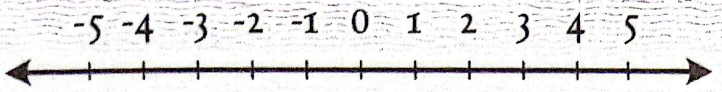


Representación «polar» de un número complejo.



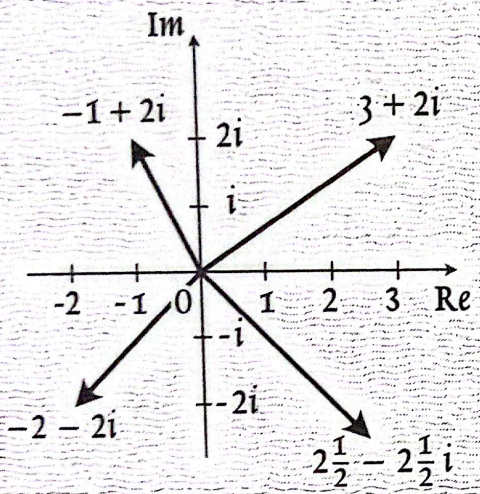
El conjunto fractal de Mandelbrot se define en el plano complejo. Puede generarse mediante un proceso que implica la iteración del mapa $z \to z^2 + c$.

Números reales



La recta real no solo contiene los números enteros positivos y negativos, sino también todas las fracciones positivas y negativas y números irracionales como $\sqrt{2}$ y π.

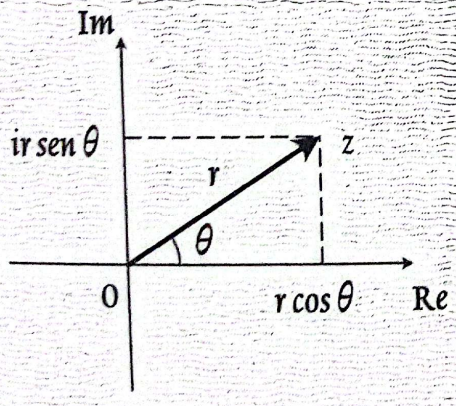
Números complejos



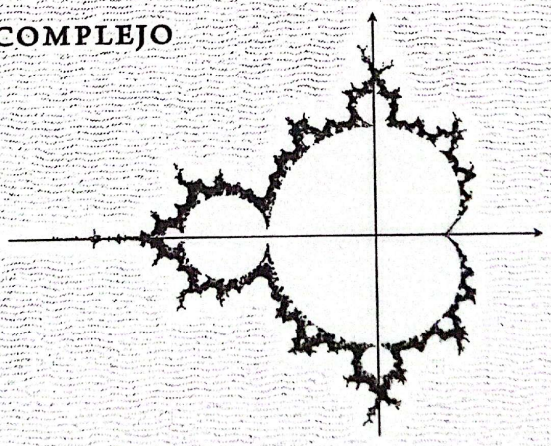
La recta real se convierte en el eje Re(al) en el plano de números complejos. Cada punto del plano corresponde a un número complejo, y viceversa.

Los números del eje Im(aginario) se denominan «números imaginarios puros» siendo su parte real igual a 0.

Plano complejo



Representación «polar» de un número complejo.



El conjunto fractal de Mandelbrot se define en el plano complejo. Puede generarse mediante un proceso que implica la iteración del mapa $z \to z^2 + c$.

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Contracciones de longitud y dilataciones de tiempo

Einstein amplió el principio de la relatividad de Galileo del movimiento uniforme de la mecánica a todas las leyes de la física (incluida la electrodinámica), además de incorporar la naturaleza constante de la velocidad de la luz, c. La base de su *teoría de la relatividad* especial son las *transformaciones de Lorentz* que relacionan un sistema de coordenadas (x', y', z', t') con otro, (x, y, z, t), que avanza a una velocidad v. En el caso concreto de que el movimiento sea paralelo a (por ejemplo) el eje x

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Nótese que estas transformaciones dan como resultado contracciones de longitud en la dirección x y dilataciones de tiempo (pero ambas son despreciables cuando v es pequeña con relación a c). Para una dirección de movimiento más general, una ecuación matricial ofrece las transformaciones análogas.

La composición de velocidades u y v en este contexto no resulta $u + v$, sino:

$$\frac{u + v}{1 + \left(\frac{uv}{c^2}\right)}$$

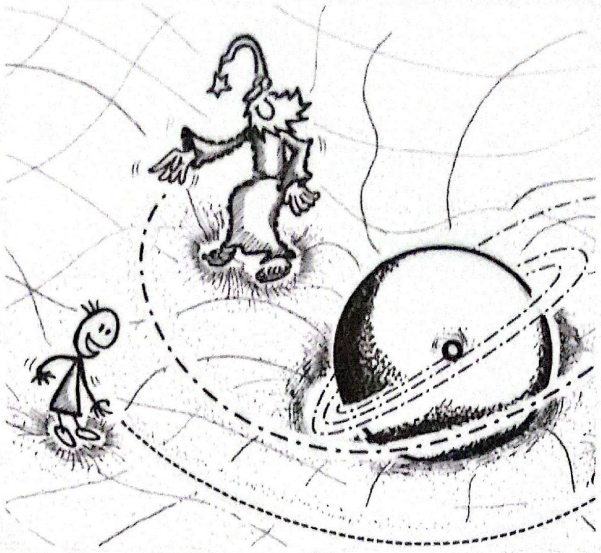
La energía (escalar) y la cantidad de movimiento (vector) de un objeto de masa m y velocidad (vector) v se expresan así, respectivamente:

$$E = \gamma mc^2, \quad \boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$$

Y si el objeto está en reposo, obtendremos la ecuación por excelencia:

$$E = mc^2$$

Ejemplo: Próxima Centauri, la estrella más próxima al Sol, está a 4,24 años luz. Si dejo a un amigo en la Tierra y viajo allí al 99 % de la velocidad de la luz, verá que mi viaje dura 4,24 × 0,99 = 4,20 años. Pero mi reloj irá más lento, por el factor de Lorentz, $\gamma = 1/\sqrt{(1-v^2/c^2)} = 7{,}09$. Así que, para mí, el viaje a Próxima solo dura 4,20 / 7,09 = 0,592 años, y únicamente he recorrido una distancia de 4,24 / 7,09 = 0,597 años luz.



ECUACIÓN DE CAMPO DE EINSTEIN

$$\underbrace{R_{\mu\nu}}_{\text{tensor de curvatura}} - \frac{1}{2}\underbrace{R}_{\text{curvatura escalar}}\underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{tensor métrico}} + \underbrace{\Lambda g_{\mu\nu}}_{\text{constante cosmológica}} = \frac{8\pi G}{c^4}\underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{Tensor de energía-impulso (describe la distribución de materia y energía)}}$$

c = velocidad de la luz; G = constante de gravitación

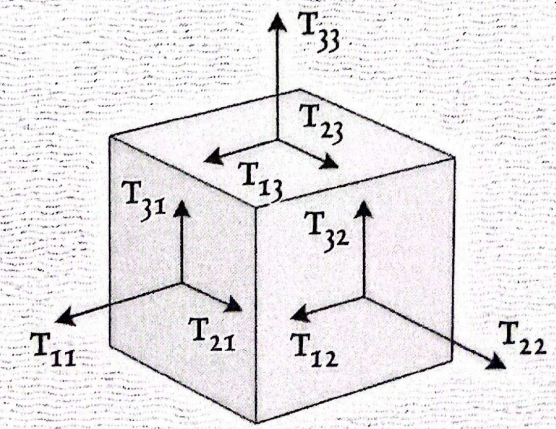
TENSOR DE ENERGÍA-IMPULSO

densidad de energía — flujo de energía

$$\begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

tensión cortante

densidad de impulso — flujo de impulso — presión



CONSTANTES

Velocidad de la luz	c	300.000 km/s; 186.282,4 millas s^{-1}; 2,99792458 x 10^8 m s^{-1}
Año luz	ly	0,306601 pc; 5.878.625,373.183,608 millas; 9.460.730.472.580 km
Parsec	pc	3,26156 al; 1,9173508 x 10^{13} millas; 3,085678 x 10^{13} km
Unidad astronómica	AU	1,5813 x 10^{-5} al; 92.955.791 millas; 149.597.892 km

Velocidad del sonido *en aire seco a 0°C* 331,4 m s^{-1}; 1.087,3 pies s^{-1} *en agua a 20°C* 1.482 m s^{-1}, 4.862 pies s^{-1}

Masa del electrón	m_e	9,1093897 × 10^{-31} kg
		= 0,51099 MeV
Carga del electrón	e	1,602176 × 10^{-19} C
		= 4,803 × 10^{-10} esu
Masa del protón	m_p	1,672623 × 10^{-27} kg
		= 1.836.1 x masa del electrón
Masa del neutrón	m_n	1,6749286 x 10^{-27} kg
Unidad masa atómica	u	1,66054 x 10^{-27} kg
Eq. masa at.	$m_u c^2$	931,494 MeV
Const. de Avogadro	N_A	6,02214 x 10^{23} mol^{-1}
Radio de Bohr	a_o	5,2917725 x 10^{-11} mol^{-1}
Const. de Boltzmann	k	1,38065 x 10^{-23} J K^{-1}
Veloc. escape terrestre	v_{esc}	11,2 kms^{-1}, 6,96 millas s^{-1}
Acel. grav. terrestre.	g_n	9,80665 ms^{-2}
		32,174 pies s^{-2},
Atm. estándar terrestre		101.325 Pa
Const. de Faraday	F	9,648534 x 10^4 C mol^{-1}
Const. estructura fina	α	7,297353 x 10^{-3}

Const. univ. gases ideales	R	8,314472 J K^{-1} mol^{-1}
Const. gravitatoria	G	6,674259 x 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
Punto triple H_2O	T_{tpw}	273,16 K
Impedancia del vacío	Z_o	376.7303 Ω
Const. de Loschmidt	n_o	2,6867775 x 10^{25} m^{-3}
Cuant. del flujo mag.	ϕ_o	2,067833758 x 10^{-15} Wb
Const. magnética.	μ_o	4π x 10^{-7} NA^{-2}
Vol. molar gas	V_m	2,2413968 x 10^{-2} m^3 mol^{-1}
Permitividad del vacío	μ_o	4π x 10^{-7} H m^{-1}
Const. permitividad	ε_o	8,8541878 x 10^{-12} F m^{-1}
Constante de Planck	h	6,62606896 x 10^{-34} J s
Const. de Planck/2π	$\hbar$	1,054571726 x 10^{-34} J s
Longitud de Planck	l_P	1,616199 x 10^{-35} m
Tiempo de Planck	t_P	5,31906 x 10^{-44} s
Temp. de Planck	T_P	1,41683 x 10^{32} K
Masa de Planck	m_P	2,17651 x 10^{-8} kg
Rcp. const. estr. fina	$1/\alpha$	137,035999
Const. de Rydberg	R_H	1,097373 x 10^7 m^{-1}

UNIDADES

Cantidad física	*Símbolo para cantidades*	*Nombre de la unidad SI*	*Símbolo de la unidad*	*Definición inmediata*	*Definición unidades básicas*	*Como masa, longitud, tiempo y corriente*
frecuencia	f	hercio	Hz	s^{-1}	s^{-1}	T^{-1}
fuerza	F	newton	N	kg m s^{-2}	kg m s^{-2}	M L T^{-2}
energía	W	julio	J	N m	kg m^2 s^{-2}	M L^2 T^{-2}
potencia	P	vatio	W	J s^{-1}	kg m^2 s^{-3}	M L^2 T^{-3}
presión	p	pascal	Pa	N m^{-2}	kg m^{-1} s^{-2}	M L^{-1} T^{-2}
carga	Q	culombio	C	A s	A s	T I
voltaje	V	voltio	V	J C^{-1}	kg m^2 s^{-3} A^{-1}	M L^2 T^{-3} I^{-1}
capacitancia	C	faradio	F	C V^{-1}	A^2 s^4 kg^{-1} m^{-2}	M^{-1} L^{-2} T^4 I^2
resistencia	R	ohmio	Ω	V A^{-1}	kg m^2 s^{-3} A^{-2}	M L^2 T^{-3} I^{-2}
conductancia	G	siemens	S	Ω^{-1}	kg^{-1} m^{-2} s^3 A^2	M^{-1} L^{-2} T^3 I^2
dens. de flujo	B	tesla	T	N A^{-1} m^{-1}	kg s^{-2} A^{-1}	M T^{-2} I^{-1}
flujo magnético	Φ	weber	Wb	T m^2	kg m^2 s^{-2} A^{-1}	M L^2 T^{-2} I^{-1}
inductancia	L	henrio	H	V A^{-1} s	kg m^2 s^{-2} A^{-2}	M L^2 T^{-2} I^{-2}

PESOS Y MEDIDAS

Sistema imperial británico estándar

1 yarda = 3 pies = 36 pulgadas
1 estadio = 220 yardas = 660 pies
1 milla náutica = 6080 pies
1 libra = 16 onzas
1 centena = 112 libras
1 pinta = 4 *gills* = 20 onzas fluidas

1 estadio = 2 yardas = 6 pies
1 milla = 1 760 yardas = 5 280 pies
1 acre = 4.840 yardas cuadradas
1 *stone* = 14 libras
1 tonelada = 2 240 libras
1 galón = 277,4 pulgadas cúbicas

Sistema imperial británico: métrico decimal

1 pulgada = 2,54000 cm
1 pie = 0,304800 metros
1 milla = 1,60934 kilómetros
1 onza = 28,3495 gramos
1 libra = 0,45359237 kilogramos
1 tonelada (larga) = 1,016,047 kg
1 galón = 4,549631 litros
1 *bushel* = 36,397 litros
1 acre = 0,404687 hectáreas
1 pulgada cúbica = 16,3871 cm cúbicos
°Fahrenheit = $\frac{9}{5}$ (°Celsius) + 32
1 caballo de potencia = 0,7457 kilovatios
1 libra por pulgada cuadrada = 0,0688 atm
1 pie-libra = 1,355 joules

Sistema imperial británico: métrico decimal

1 cm = 0,393701 pulgadas
1 metro = 3 280842 pies
1 kilómetro = 0,621371 miles
1 gramo = 0,0352740 onzas
1 kilogramo = 2,204622 libras
1 tonelada = 0,9842064 toneladas (largas)
1 litro = 0,219975 galones
1 litro = 0,027475 *bushels*
1 hectárea = 2,47105 acres
1 cm cúbico = 0,0610237 pulgadas cúbicas
°Celsius = $\frac{5}{9}$(°Fahrenheit − 32)
1 kilovatio = 1,3410 caballos de pot
1 atmósfera = 14,696 libras por pulgada cuadrada
1 julio = 0,738 pies-libra

Pesos y medidas estadounidenses distintos de los británicos

1 centena EE. UU. = 100 libras
1 tonelada (corta) EE. UU. = 0,892857 ton. largas br.
1 galón EE. UU. = 3,785412 litros
1 galón EE. UU. = 0,83267 galones británicos
1 galón seco = 4,404884 litros
1 *bushel* EE. UU. = 35,2391 litros
1 *bushel* EE. UU. = 0,9689 *bushels* británicos

1 tonelada (corta) EE. UU. = 2.000 libras
1 tonelada (corta) EE. UU. = 907,184 kilogramos
1 litro = 0,264172 galones EE. UU.
1 galón británico = 1,20095 galones EE. UU.
1 litro = 0,227021 galones secos
1 litro = 0,028378 *bushels* EE. UU.
1 *bushel* británico = 1,0321 *bushels* EE. UU

Sistema métrico decimal

°Kelvin (K) = °Celsius + 273,15
1 atmósfera = 101.325 Pa
1 caloría (cal) = 4,184 J
1 esu = $3{,}3356 \times 10^{-10}$ C (culombios))
1 erg = $2{,}390 \times 10^{-11}$ kcal
1 eV / molécula = 96,485 kJ mol^{-1}
1 kcal mol^{-1} = 349,76 cm^{-1}, 0.0433 eV
1 newton por metro cuadrado (N m^{-2}) = 1 Pascal (Pa)

1 angström (A) = 10×10^{-10} m
1 bar = 105 Pa
1 curio (Ci) = $3{,}7 \times 10^{10}$ s^{-1}
1 erg = 10^{-7} J
1 eV = $1{,}60218 \times 10^{-19}$ J
1 julio (J) = 0,2389 cal
1 kJ mol^{-1} = 83,54 cm^{-1}
1 n.° de onda (cm^{-1}) = $2{,}8591 \times 10^{-3}$ kcal mol^{-1}

Prefijos: 10^3 = *kilo* 10^6 = *mega* 10^9 = *giga* 10^{12} = *tera* 10^{15} = *peta* 10^{18} = *exa*
10^{-3} = *milli* 10^{-6} = *micro* 10^{-9} = *nano* 10^{-12} = *pico* 10^{-15} = *femto* 10^{-18} = *atto*

SERIES Y EXTRAS

$\pi = 3{,}14159265358979\cdots$ $\qquad e = 2{,}718281828459045\cdots$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\cdots$ $\qquad \sqrt{\pi} = 1{,}7724538500905516\cdots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, entonces $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots (-1 < x < 1)$

$e = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cdots}}}}}}}}}}}$

$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}}}}}}$ $\qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}}$ $\qquad \phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}}$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots (-1 < x < 1)$

$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$ $\qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \cfrac{13^2}{6 + \cfrac{15^2}{6 + \cfrac{17^2}{6 + \cfrac{19^2}{6 + \cfrac{21^2}{6 + \cdots}}}}}}}}}}$

$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ *radianes*

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$, $\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ (*x en radianes*)

Serie de Taylor: $f(x) = f(x-a) + af'(x-a) + \frac{a^2}{2!}f''(x-a) + \frac{a^3}{3!}f'''(x-a) + \cdots$

Serie de Maclaurin: $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots$

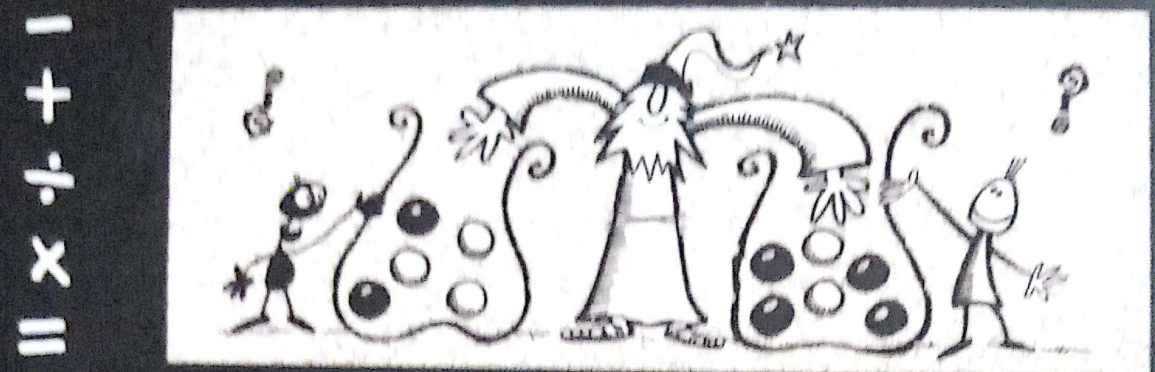
Fracciones: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ $\qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

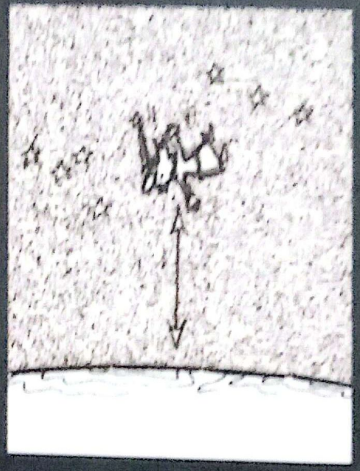
Fórmula «tan $\frac{1}{2}$»: si $t = \tan\frac{1}{2}\theta$, $\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$

Función zeta de Riemann: «Probablemente el objeto más estimulante y misterioso de las matemáticas modernas pese a su absoluta sencillez». (M. C. Gutzwiller)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5^x}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}\right)\cdots (x > 1)$$

donde p_k es el número primo *k*th.





Las ecuaciones son las invocaciones mágicas de millones de matemáticos modernos. ¿Alguna vez ha necesitado una con urgencia?

El matemático Matthew Watkins y el ilustrador Matt Tweed han reunido prácticamente todas las ecuaciones más conocidas de las matemáticas y la física en este diminuto libro. Una guía de referencia rápida, entretenida y elegante que complacerá a cualquiera que se interese por la ciencia. No interesados abstenerse.

Contiene:
Círculos. Triángulos. Gravedad. Mecánica. Trigonometría. Estadísticas. Áreas. Líquidos. Gases. Sonido. Electricidad. Cálculo. Campos. Dimensiones. Matrices. Constantes. Circuitos. Probabilidades. Engranajes. Y mucho más.

ISBN 978-84-1154-023-0
9 788411 540230
WWW.LIBRERO-IBP.ES